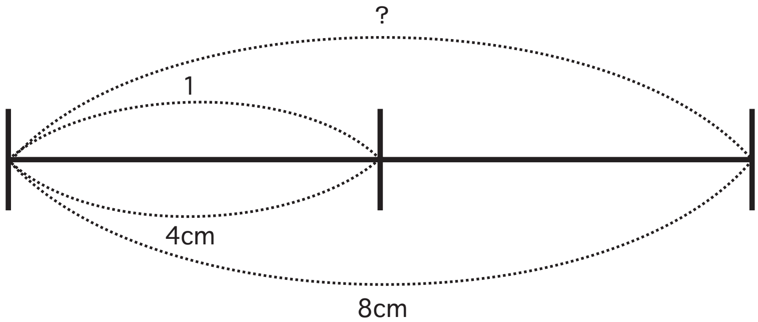
第２節　割合

算数のなかでもっとも重要でありながら，児童にとってもっとも苦手な単元は割合である。割合を理解するか理解しないかが，算数を好きにし得意にするか，嫌いにし苦手にしてしまうか，の分かれ目と言ってもいい。割合の理解が，速さなど他の単元の理解に決定的な影響を与える。割合のなかに算数の秘密の半分が入っていると言っても過言ではない。

割合の定義は「割合とは比べられる量がもとにする量の何倍であるかを示す量である」というものである。この定義に割合の単元で学ぶすべてが入っている。私が意味からの算数教育と言う場合，この定義以外何も教えるな！ということを意味している。つまり割合のすべての問題は，この定義に戻って考えよ，ということなのである。「割合＝比べられる量÷もとにする量」，「比べられる量＝もとにする量×割合」，「もとにする量＝比べられる量÷割合」の３つの公式は一切使う必要がない。使う必要がないどころか，公式は有害ですらある。「公式は本質を隠蔽する。」

［例 1］8cm の 4cm に対する割合を求めよ。



割合は，比べられる量がもとにする量の何倍であるかを示す数字である。したがって，この問題は 8cm が 4cm の何倍であるかと聞いている。つまり 8 のなかには 4 がいくつ入っているかと聞いているのである。だから，

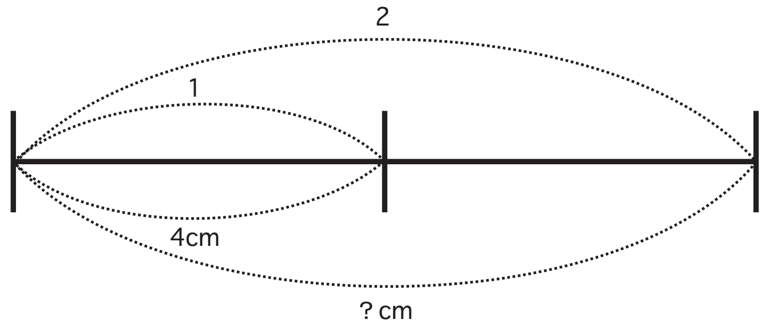
$$8\div4=2$$

の計算から割合は 2 である。

線分図では，上に割合，下に実際の数や量が書かれている。上下の役割を決めてしまうと一種の公式主義になってしまうが，指導のはじめのうちははっきり決めておいた方がいい。割合が理解できなくなる大きな原因の一つが，実際の量と割合の混乱にある。実際の量は単位がある量であり，割合は単位のない量である。したがって，割合とはかなり抽象的な概念である。だが，鍛え方では割合という概念は直観の領域へ，すなわち右脳の領域に入って来るのである。車の運転を習いはじめのときには，坂道発進するにはサイドブレーキを引いて，エンジンを吹かせてからブレーキを下ろす，と頭で反芻してから実際に行動しているだろう。ところが，熟練のドライバーはそんなことは考えず，反射的に行っているはずである。これは最初左脳の領域にあったものが，右脳の領域に移ったことを意味している。つまり論理から直観に移行したのである。先に，直観は論理を支える柱であると言ったが，逆に論理の反復が直観を形成していく場合もあるのである。「常に形式は内容的であり，常に内容は形式的である。」（ヘーゲル「小論理学」など）　割

合についても，訓練を続けるうちに右脳の領域へ，つまり直観の領域に移っていけるのである。あくまで時間をかければということである。ここに時間をかけないで，性急な結果を求めるところに左脳主義に陥る原因がある。分数や小数についても，感覚的な理解がないのは訓練不足に起因する。後に評論する。

［例 2］4cm に対するあるものの割合が 2 である。あるものはいくつか。

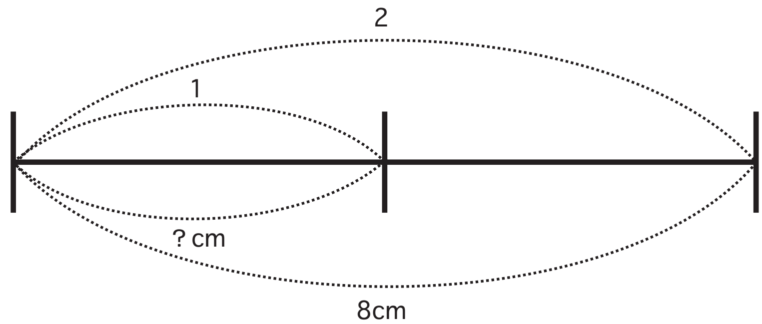


あるものは 4cm の 2 倍だといっているのだから

$$4\times2=8$$

の計算から 8cm である。

［例 3］あるものに対する 8cm の割合が 2 である。あるものを求めよ。



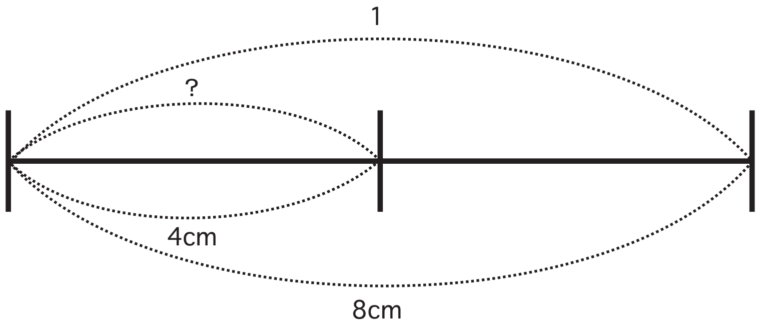
割合 2 で 8cm だから，割合 1 に対してはその半分で（あるいは 2 倍したら 8cm になるのだから）

$$8\div2=4 \qquad \text{ないしは} \qquad 8\times\frac{1}{2}=4$$

の計算から 4cm である。

以上，例 1 から例 3 まで，公式がいらないということは納得してもらえると思う。ところが問題は，速さのときと同じで，数値が分数や小数になるときである。つまり以下の例である。ここでも先の速さのときと同じ拒絶反応に出会うことになる。

［例 4］4cm の 8cm に対する割合を求めよ。

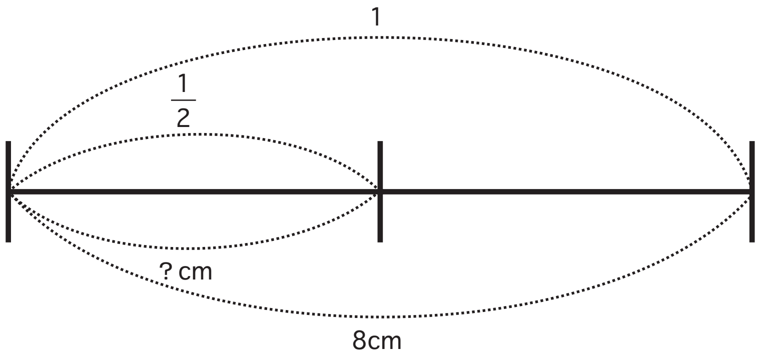


割合は，比べられる量がもとにする量の何倍であるかを示す数字である。したがって，この問題は 4cm が 8cm の何倍であるかと聞いている。つまり 4 のなかには 8 がいくつ入っているかと聞いているのである。だから，

$$4 \div 8 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

の計算から割合は $\frac{1}{2}$ である。

［例 5］8cm に対するあるものの割合が $\frac{1}{2}$ である。あるものはいくつか。

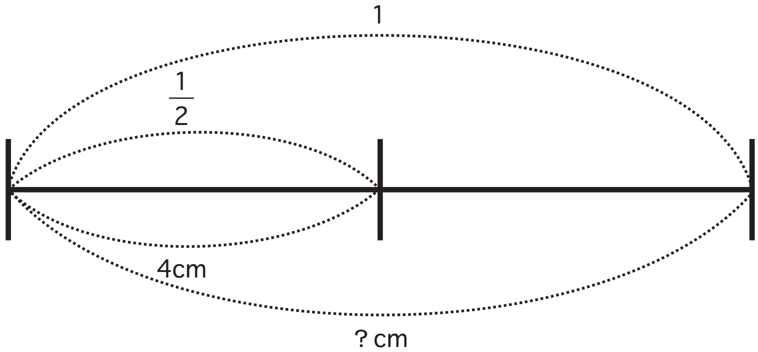


あるものは 8cm の $\frac{1}{2}$ 倍だといっているのだから

$$8 \times \frac{1}{2} = 4$$

の計算から 4cm である。

［例 6］あるものに対する 4cm の割合が $\frac{1}{2}$ である。あるものを求めよ。



割合$\frac{1}{2}$で 4cm だから，割合 1 に対してはその 2 倍で（あるいは$\frac{1}{2}$倍したら 4cm になるのだから）

$$4\times2=8 \qquad \text{ないしは} \qquad 4\div\frac{1}{2}=8$$

の計算から 4cm である。速さの例 4 のときと同じで，後半のわり算は確かにわかりにくいので，単位あたりの量はわり算で出すという点だけ，公式化してもよい。

例 4 から例 6 までの拒絶反応については，速さのときと同じである。充分な訓練によって，分数が血となり肉となっていないための反応である。だから，分数指導ももちろん改革されなければならないが，しかし割合や速さの単元で決して公式を使用しないで，忍耐強く指導を続けるならば，分数に対するアレルギーもなくなっていくはずである。１つ１つ丁寧にねばり強く説明して，児童を訓練させていけば必ず理解できるはずである。先に挙げた運転の例と同じで，ねばり強い指導によって直観の領域に移行できるはずである。絶対に性急な指導をしなければの話である。

第４章　数学教育の改革（理論編）

第１節　文字式の計算

数学は算数に比べれば，ずっと論理的で左脳的である。しかし数学においても，第２章の実践編で示したようにイメージや直観がやはり使われるべきである。文字式の指導では，イメージはどのように使われるべきであろうか。中学生がよく間違える文字式の計算例は，次のものである。

$$3a-a=3a \qquad\qquad 3a-a=3$$

右脳を使う数学なら，上記の間違いは絶対に起きない。形式的な指導に終始するために引き起こされる間違いなのである。「リンゴが３個ありました。リンゴを１個取ったら（食べたら）リンゴはいくつ残りますか。」この問いに，リンゴは３個残ると答える中学生がいるだろうか。もしいたら「世の中はそんなに甘くないぞ。３個あって１個食べても３個残り続けるなら働く必要がなくなってしまう。もっと極端な例を出せば，３万円から１万円出しても３万円残り続けるな

ら，３万円で一生生きていけることになる。」後半の間違いはもっと傑作である。「３個のリンゴからリンゴを取ったら３が残ります」と答えているのである。$3a-a$ という計算は，論理的には分配法則を使って

$$3a-a=(3-1)a=2a$$

と計算されている。中学生たちの問題は，計算の根拠を理解しないで（この場合は分配法則）機械的に文字式の計算を理解してしまうことなのである。たとえば，$5a-2a$ の計算は $5-2$ を計算して，答えに a を添えると。確かにこの計算規則は正しい。参考書もそうまとめているし，先生もそういう説明をするに違いない。生徒たちは，安易な理解を求める。生徒たちは，なぜ計算できるのかを考えようとしない。当然である。算数教育で，考えない習慣を身につけてしまったのだから。

前々任校の生徒たちも，定理や公式の証明を極端に嫌がったものである。彼らは理由や証明などを説明しないで，いきなり公式を提示することを要求するのである。これに対して，筑波大学の付属高校で教育実習をした友人から聞いた話によると，「先生，今提示した定理を証明してください。私たちは，証明されたもの以外を受け取ってはならないと教えられています。」付属高校の生徒の質問は，決して教習生をいじめるための質問ではない。当然の要求である。土台のはっきりしないものを提示され，その土台の上に乗れと言われたら不安になるのは当然のことである。

多くの中学生たちの問題点は，イメージ，根拠，計算規則の往来が自由にできない点である。計算規則を学んでしまうと，それ以外の思考ができなくなってしまう。問題に応じて柔軟に切り替えられる頭脳をつくることが肝要である。あるいは，いろいろな角度から１つの問題を考えられるようにしてやることが重要である。多くの中学生たちは，別解を極端に嫌がる。別解を提示されるとわからなくなると多くの中学生が言う。中学生たちは，頭脳労働の経済原則に従おうとするからである。なるべく頭脳労働を節約しようとするわけだ。考えないで済むようにしたいのである。

１つの問題を，いろいろな視点から考えられるようにしなければならない。その際に直観やイメージを働かせることが大切である。計算規則で考えると，$3a-a$ は $3a$ かもしれないが，イメージで考えるとおかしいと気がつくことが大切なのである。

第２節　必要条件・十分条件・必要十分条件

この３つの条件ほど，大切な条件でありながら誤解されている条件はないような気がする。ある推理もののテレビ番組で，犯人を証明する条件として「必要十分条件」だと叫ぶ場面がある。この場面の誤解は，十分条件であると言えば済むところなのに，それに必要を付け加えることで，条件がより強まっていると考えている点である。数学的に言えば，条件として必要十分条件より厳しいあるいは強い条件は，十分条件である。条件の強さから言えば，

十分条件≧必要十分条件≧必要条件・・・・①

という関係が成り立つ。だが，一般的なイメージでは必要十分条件が一番厳しい条件に映るのであろう。物理学科や数学科に進学してくる学生の中にも，残念ながら理解していない学生がいるというのが現実である。彼らの理解は，機械的な理解にとどまっている。先に，条件の強さから

言えばということで式を書いたが，条件に該当する対象の集合の広がりで言えば，

十分条件≦必要十分条件≦必要条件・・・・・②

という関係が成り立つ。条件が強いほど，当てはまるものが少なくなるという当然のことである。しかし，①②が混同の原因の一つになっているようである。

必要条件，十分条件の理解は非常に重要である。これは証明，論証の基礎である。数学のすべての問題に関わっていると言っても，決して過言ではない。記述式の大部分の問題が，「①必要条件から十分条件へ②必要十分条件へ」のいずれかの方法によって，あるいは両者の組み合わせによって，論証されているのである。数学教育の意義の一つは，論理そのものの仕組みを理解させることにある。したがって，必要条件や十分条件の理解は，是非ともさせなければならないのである。

はじめに書いたように，ここでの指導は次のように行われている。

$p \to q$・・・・・(A)

が真である場合，q を p であるための必要条件，p を q であるための十分条件といい，

$q \to p$・・・・・(B)

も成立しているとき，p を q であるための必要十分条件，q を p であるための必要十分条件であると指導してから，必要条件であるか，十分条件であるか，必要十分条件であるかの判定法を例題によって指導するのである。たとえば例題は次のものである。

「次の p，q について，p が q であるための必要条件ならば①，十分条件ならば②，必要十分条件ならば③，必要条件でも十分条件でもないなら④として，もっとも適するものを番号で答えよ。

(1)　$p : X < 0$，$q : X^2 \neq 0$

(2)　$p : X$ は素数，$q : X$ は奇数

(3)　X，Y は複素数とする。$p : X^2 + Y^2 = 0$，$q : X = Y = 0$

(4)　△ABC で，p：△ABC は直角三角形，$q : AB^2 + BC^2 = CA^2$　」

判定方法は，(A)，(B)が成り立つかどうかである。たとえば，(1)では(A)は成り立つが(B)は成り立たないので，②だというわけだ。そして，全部解説した後，類題を解かせるのである。類題を何題も解かせれば，確かに判定できるようにはなるだろう。しかし，これは左脳による理解であって，右脳による理解ではない。言い換えれば，論理による理解であって，直観的理解ではない。肝要なのはなぜ必要という言葉が使われ，十分という言葉が使われるのか，ということである。

誰が考え，誰が日本語に訳したのか私は知らないが，必要条件・十分条件・必要十分条件という用語は，実によくできた用語である。学を発展させていくためには，概念装置がしっかりしているかどうかが決定的であるが，数学の概念・用語はよくできている。例えば，関数という概念だ。この概念が数学を発展させただけでなく，分析哲学に大きな影響を与えたことはよく知られている。必要条件・十分条件もすばらしい用語の一つだ。だから，普段から右脳を使う習慣のある生徒は，先の定義や判定法の説明だけで，直観的に理解できるであろう。だが，現在の教育によってほとんどの生徒は左脳化してしまっているので，理解できないのである。だから，イメージがわくように指導者が工夫してやらなければならない。私は，次のような比喩を必ず入れる。

「結婚相手の条件

①高収入（年収 1,000 万円以上）

②身長 180cm 以上

③ルックスがいい

④性格がいい

以上全部の条件がそろった場合に結婚するというなら，４つの条件を全部あわせたものが，必要十分条件です。そして，１つ１つは必要条件です。また，３つ以下でも必要条件です。さらにその４つに次の条件

⑤趣味が一致する

⑥爺婆抜きである

などが付け加えられれば十分条件ということにならないかい。」

この例はあくまで比喩である。そこでもっと正確にイメージをつかむために次の例に入る。

「p：偶数　q：6 の倍数

p は q であるための必要条件である。なぜなら奇数では，6 の倍数であることはできないからだ。6 の倍数であるためには，偶数であることが必要なのです。だが，偶数という条件だけで十分かといえば，十分ではないですね。例えば，4 は偶数だけど 6 の倍数ではない。6 の倍数であるためには，もう一つ条件が必要です。それは 3 の倍数であるという条件です。したがって，

p：偶数　r：3 の倍数　q：6 の倍数

とすると，p や r はそれぞれ q であるための必要条件だが十分条件ではない。だが，p と r の両方がそろえば，十分だから必要十分条件ということになる。」

確かにいくつかの例を説明しても，なかなかイメージはつかめるものではない。しかし，イメージをつかんでいるかどうかは決定的なことなので，時間をかけても理解させるべきである。一度理解してしまえば，それ以降の数学理解が，理解していないよりはすんなりとするはずである。