第２章　実践編（対数の指導）　数学はイメージだ！

最初に，私の掲げる直観算数および直観数学のイメージをつかんでもらうために，私の実践においてもっとも成功した例を挙げたいと思う。それは対数の指導である。

私の前々任校は，俗に教育困難校とか底辺校と言われる学校であった。ある年の合格者の数学の平均点は，100 点満点のテストで 23 点であり，15 点以下の者が$\frac{1}{3}$に達したことがある。したがって，毎年一桁台の生徒が多数入学してくる高校であった。なかには 5－2＋3 を 0 と答える生徒もいたのである。一昔前，ある工業高校の生徒が分数の計算ができないということで話題になったことがあるが，教育困難校と言われる高校においては，分数の計算が難しい計算であるということは常識なのである。したがって，前々任校における数学指導は困難を極めた。そして，生徒が理解できない代表的な章の一つが，指数・対数なのである。特に後半の対数は抽象度が高く，生徒たちにとって理解困難なものであった。私が，指導で困った例題の一つが，次の問題である。

［例題］　$\sqrt[5]{3}$ の近似値を求めよ。

［答案］　$x=\sqrt[5]{3}$ とおいて両辺の対数をとると

$$
\begin{aligned}
\log_{10} x &= \log_{10} \sqrt[5]{3} \\
&= \log_{10} 3^{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{1}{5}\log_{10} 3 \\
&= \frac{1}{5}\times 0.4771 \\
&= 0.09542
\end{aligned}
$$

したがって，常用対数表から $x \fallingdotseq 1.25$

この数式の操作の下にどんなイメージが隠されているか，読みとれるだろうか。指導者が潜在しているイメージを紐解いてあげない限り，ほとんどの生徒は読みとることが不可能である。前々任校の生徒たちでは 100％不可能である。私の想像では，今これを読んでいる先生方でさえ，読みとるのは困難なのではないだろうか。私自身これをさっと読んだとき，すぐには理解した気持ちになれなかった。もちろん個々の展開は追うことができたし，また，何も見ないで生徒たちに説明することはできた。しかし，何か腑に落ちないものがあったのである。そうだ，直観的理解ができていないのだ。

私は，直観的に生徒たちに理解させる方法を模索した。試行錯誤を重ねた結果，指数・対数の章は次のように指導することにした。

導入	ある中学生の発見	1 時間
展開	教科書の指導	15 時間
まとめ	対数の意味	1 時間（先の例題の説明）

この指導によって，前々任校のほとんどの生徒たちが，対数のイメージをつかみ，先の例題を解けるようになった。「数学ってこんなに奥が深いのか」という感想を書いた女子生徒もいた。また，１年間の授業の最後に書いてもらう感想文に，もっとも感動した章として「指数・対数」を挙げていた生徒もいた。私事になるが，ほとんどの生徒が先の例題を解けるようになったことがあまりにも嬉しくて，こう指導したらうまくいったんだ，という話を妻（妻は国語科の高校教員である）にしたら，「高校時代は，対数って少しも意味がわからなかったけど，この説明で対数のイメージがよくつかめた。私も高校時代にこういう先生に巡り会えたら，数学を好きになっていたかもしれない」と言われたことを付け加えさせていただきたい。

また，前任校の校内研究授業において，対数の意味の部分を扱い，校長先生をはじめとしていろいろな先生から御教示をいただいた。研究授業自体は，内容を欲張りすぎて２時間分を１時間の中に詰め込んでしまったので失敗であったが，研究授業の後の授業研究で，授業の問題点をご指摘いただき大変参考になった。ここで学んだ点を含めて，指導展開例を評述してみたいと思う。

導入　ある中学生の発見		1 時間
展開　教科書の指導		15 時間
まとめ	対数の意味(1)	1 時間（簡易計算器の作成）
	対数の意味(2)	1 時間（先の例題の説明）
問題演習		2 時間

以下の記述は，導入と対数の意味(2)については前々任校における実践を基にしたノンフィクションであり，対数の意味(1)は，前任校における研究授業を参考にはしているが，フィクションである。

◆導入　ある中学生の発見（１時間）

「今日はある天才中学生について話をする。その中学生が，２年生のときに発見したことについてである」と言って授業を開始する。そして，黒板の左の上の方に大きく 2 と書く。次に生徒を順番に指名し，今黒板に書いた数字の 2 倍を次々に言わせ，その数字を右へ右へと書いていく。2，4，8，16，32，・・・というようにだんだん計算が大変になってくる。これだけで生徒は緊張し計算に没頭し，これからいったい何が起きるのかという期待が教室中に充満してくる。桁数が 5，6 桁になると，「次は私だ」と生徒は大変緊張しているので，この辺で指名を打ち切る。

「さて，今計算してもらった数字に今から黄色で番号を打っていく。そうすると不思議なことが起きる」と言って 2，4，8，・・・と白チョークで大きく書かれている数字の上に，小さく黄色チョークで番号を振っていく。すると以下のような表が完成する。

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	4	8	16	32	64
7	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
128	256	512	1024	2048	4096
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
8192	16384	32768	65536	131072	262144
19	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*
524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216

次に，持参した電卓を一番前の生徒に渡して，「先生は普段計算を間違ってばかりいるけど，実は暗算の天才だったんだ」と言って，以下の計算など５題ぐらいを瞬時に計算し，その計算が正しいことを電卓を渡した生徒に確認させる。

256×16384＝4194304

128×8192＝1048576

はじめは生徒たちは不思議そうな顔をしているが，４，５題計算していくうちに計算原理がわかり，にやにやする生徒が出始める。そして，次にわり算に入る。

1048576÷512＝2048

16777216÷32768＝512

わり算では，かけ算の原理がわかっていた生徒は１，２題で計算方法がわかり，にっこりしている。また，かけ算がわからなかった生徒の中にも，４，５題わり算を計算していくうちにかけ算，わり算の両方の計算方法がわかってくる生徒がかなり出てくる。この段階で累乗算に入る。

16^5＝1048576

8^8＝16777216

累乗算の計算は，さすがにわかる生徒は少数のようだ。しかし，教室の$\frac{1}{3}$ぐらいの生徒は，かけ算，わり算については計算原理がわかり，他の生徒に小さな声で教え始める。普段は怖い私も，このときは生徒たちが教え合っている姿をにこにこ見ている。頃合いをみて，少年の発見をまとめる。

7	＋	*9*	＝	*16*
128	×	512	＝	65536
22	−	*15*	＝	*7*
4194304	÷	32768	＝	128
4	×	*5*	＝	*20*
16	の	５乗	＝	1048576

「つまり黄色の数字（表ではイタリックの小さめの数字）を使えば，かけ算は足し算で，わり算は引き算で，累乗算はかけ算でできることを発見したわけだ。少年はこれを発見したとき，あまりにも不思議で，この表を魔法の表ないしはコンピューターの表と呼んだんだ」と言うと，女子生徒からは「かわいい」という声が出る。さらに，私は少年が偉大だった点にふれる。「少年はこの表を喜ぶと共に，すぐに不満を覚える。この表は確かに便利だが，この表に載っている数字以外は計算ができない。そこで少年は，表の一般化を考えた。2 と 4 の間には 3 がある。3 にも 1 と 2 の間の数で対応する黄色の数字があるはずだ。さらに，4 と 8 の間の 5，6，7 についても，2 と 3 の間の数でだんだんに大きくなっていく黄色の数が対応しているはずだ。その数を全部見つけてやれば，あらゆるかけ算は足し算で，わり算は引き算で，累乗算はかけ算でできるはずだ。そして，少年はその数字をすべて見つけてやろうと，努力するのである」だが，中学２年生だった彼にはそれは不可能な課題だった，と言って話を次に移す。

黄色の数字（表ではイタリックの小さめの数字）が，これから学んでいく対数であることを教える。そして，白色の数字（表ではイタリックになっていない大きめの数字）を真数という，と言い，下のような表を提示する。

真数の国	×	÷	n 乗
対数の国	＋	－	n 倍

「真数の国と対数の国では，話す単語が違うだけでなく，文法も違うわけだ。そして文法の対応表がこの表というわけさ。」

中学２年生が発見したことは，実は約 300 年前にすでに発見されていたことを告げる。「発見者はネピアという人である。ネピアと言ってもティッシュペーパーとは何の関係もない（生徒の笑い）。コンピュータのない時代，天文学者にとって，膨大な桁数を扱う計算は悩みの種だった。しかし，ネピアが対数の表を作ってくれたおかげで，天文学者の寿命は延びたということだ。」

こうして１時間の授業を終えるわけだが，もちろん授業の最後には「ところで，その天才中学生って誰？」と聞くのを忘れない。みえみえの話なので，おおかたの生徒はにやにやしていて答えない。ところが，とぼけた生徒が必ずいて，いかにも私は気がついたという感じで「それは先生です」と答える生徒がいるのである。こうして，私はにっこりと笑って，チャイムを聞くのである。

◆展開　教科書の学習（10 時間～15 時間）

ここでの指導は，とりたてて工夫があるわけではない。通常の指導である。ただ，前々任校か前任校かによって，指導時間が違うのはもちろんのことである。前任校においても，習熟度別クラスの違いに応じて，説明の詳しさや問題演習の質と量が変わってくる。前々任校や前任校でも，習熟度の高くないクラスでは，問題演習は教科書のレベルに限定されるべきである。そして，説明は丁寧でなければならない（といっても前任校の場合，習熟度別やコース別の授業でも，クラ

ス内の格差が大きくて限界があった。学力が上の生徒の要望にも応えてやらなければならないからだ)。

ここで，一般にある誤解を解いておきたい。前々任校では，入試の成績が 15 点以下の者が$\frac{1}{3}$にも達し，分数の計算はもちろんのこと，簡単な正負の計算さえできない生徒がクラスに少なからずいた。また，一般受験では大学でも短大でも合格できる生徒は一人もいなかったし，また期待もできなかったので，指導にはかなりゆとりがある部分があった。前任校のように，受験に対応するために必ず教科書を終わらせなければならないということはなかった。そこで次のような考え方もないわけではない。

「分数の足し算や簡単な正負の計算もできない生徒たちに，あえて高校数学を学ばせなくてもいいのではないか。受験という制約がないなら，基礎のない生徒たちのためにあえて背伸びせず，中学校や小学校の基礎に戻って指導してあげてもいいのではないか。」

実は上の考え方は，大変な誤解なのである。栃木県高教研数学部会の研究紀要に投稿した「数学教育論（学力観のコペルニクス的転回)」に書いたことなので詳しくは書かないが，上の考え方は誤った学力観に基づいているのである。誤った学力観というのは以下の考え方である。

「中学で学ぶ数学は小学校で学ぶ算数より難しく，また高校で学ぶ数学は中学校で学ぶ数学より難しい。そして，数学は積み重ねの学問なので，基礎のない生徒に高校数学を学ばせることは難しい。」

そして，むしろ生徒に高校数学を強いるのは指導者の自己満足であるとさえ思う方もいらっしゃるであろう。しかしそれは，生徒の学力の構造を知らない，完全な誤解である。標準の学力に達しない生徒たちの学習能力における最大の問題点は「理解力」ではなく「記憶力」にある。彼らは理解したとしても，20 分も自転車をこいでいるうちに，すべてを忘却してしまうのである。だから，体系的に基礎を学習しなおしたとしても，何も残らないのである。

だが，彼らは「理解力」をもっていないわけではない。丁寧に指導すれば，高校数学でも理解できるのである。基礎の不足については，現在の単元の中で必要に応じて補ってあげればいいのである。たとえば，定積分を計算するときには分数の計算が必要になるので，このときに約分や通分などを教えてあげれば済むのである。我々が丁寧に指導してやって，彼らが高校数学を理解できたときの喜びは，通常考えられているより遙かに大きい。私がその場面に最初に遭遇したときにはびっくりするほどであった。理由は簡単である。彼らは小学校中学年以降，算数や数学を一度も理解したことがないからである。

詳細については，前稿「数学教育論（学力観のコペルニクス的転回)」を是非読んでいただくことにして，話を本筋に戻そう。右脳数学と言っても，左脳を無視するわけではない。はじめに書いたように，左脳と右脳の協同が大切なのである。言い換えると，論理と直観の結合が大切だということである。通常の指導は，直観の部分が抜け落ちて論理に偏った教育になってしまっている，と言っているにすぎないのである。だから右脳数学においても，記号による指導は当然のことながら行われなければならない。（ただし，式を変形する操作においてイメージが喚起されるかということを問題にする。物理の指導に比べれば，この部分は非常に軽視されていると言ってよい。）だから，この展開においては，論理的な指導に力点が置かれて行われる。つまり導入においては，直観やイメージに比重が置かれ，展開においては論理中心の指導がなされ，再びま

とめにおいて直観を強調して，論理と直観の統合をはかろうという構想なのである。