右脳数学（直観数学）構想

「直観のない形式は空虚であり，形式のない内容は混沌である」（カント）

第1章　序論

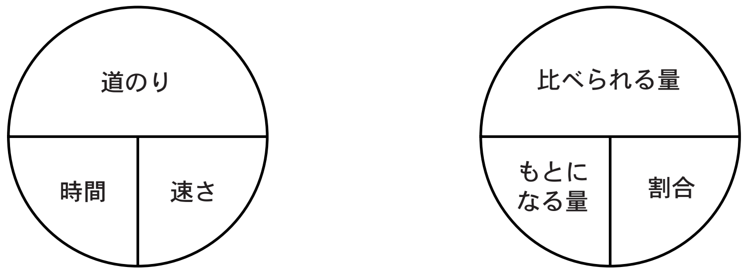
私が以下に述べる問題意識をもつようになったのは，実に小学５年生のときにまで遡る。したがって，30 年間疑問をもっていた問題について，語ろうとしているわけだ。

その問題意識の要点は，現在の数学教育が極端に論理に偏っていて，直観やイメージがあまりにも軽視されている，ということである。すなわち，左脳に偏った，右脳を使わない数学になっているということである。創造の源泉は右脳にある，と言われていることを考えれば，由々しき問題であると言わざるを得ない。

先進国でありながら，米国や欧州に比べてノーベル賞の受賞者が極端に少ない要因の一つが，ここにあるのではないだろうか。数学の発展をはじめとして，諸科学の発展のためには，右脳と左脳をバランスよく協同させることが必要である。物理学者や数学者に，論理的なタイプと直観的なタイプがいるということが事実であるとしても，いずれのタイプにおいても論理と直観を協同させていることは，おそらく疑いのないところである。将棋や囲碁においても，一流の棋士は読みと勘を備えている。NHK のある番組によると，将棋史上において初めて全冠（７冠）を果たした羽生は，他の棋士に比べて右脳をフルに使っているという。羽生の強さの秘訣はここにある。論理を支える土台は直観である。直観を，そして右脳を働かせることが肝要なのである。

小学生が中学生になったとき，最初に抱く疑問の一つは，数学と算数はどう違うのかということである。ところが，中学生を納得させられる説明を，指導者はすることができない。理由は簡単である。現在の算数はまったく数学と変わるところがないからである。現在の算数は，完全に数学化している。もっとも私は，歴史を紐解いたことがないので，現在という言葉が正しいかどうか，確信をもっているわけではない。したがって，少なくとも現在の算数は，と言っておこう。

私が小学５年生のときに抱いた疑問は，担任の先生が割合や速さの問題の解法を説明するときに，なぜ公式を使うのだろうか，ということであった。私からすると，かけ算になるのかわり算になるのかは，意味を考えれば自明なことなので，公式など必要としなかった。だから，公式など覚えたことがなかった。私は，公式を覚えさせて公式で解くより，意味に戻って説明するべきであると思っていた。だから，担任の先生が自慢げに，あたかも自分の創意工夫であるかのように（これが彼の創作でないことは，後にいろいろな先生が常に自慢げにこの図をかいたことから知ることになる），この図を示したときは，あきれ返ったものである。



にこにこマーク

この図は，形式化の極限に属するものである。意味は完全に蒸発している。公式による教育を公式主義と呼ぶとすれば，公式主義の究極とも言うべきものである。イメージなき衣である。カントの言葉を借りれば，内容のない形式である。しかし，この過ちはそのときの担任の先生の責任ではない。なぜならどの指導者も，同じ指導法をとっているからである。日本の算数教育が，公式に偏った教育をしているのである。本来必要としない公式を，算数に密輸入してしまったのである。

なぜ指導者たちが，指導をするときに公式に頼るのか。原因の一つは，指導者の発想が左脳的で，それが良き指導であると思いこんでいるからである。だが，最も大きな要因は，公式による指導を児童が歓迎するからである。意味からの指導は，幼児期から左脳化されている児童には，理解することが困難なのである。だから，ほとんどの児童は，2 時間で 8 キロの道のりを進むときの速さが 8÷2 という計算で求められることを，直観的に把握するのが困難なのである。なぜわり算になるのか，という本質的な部分を抜きにして，そこから逃げ出す指導が公式なのである。意味を剥奪された公式は，丸暗記される運命にある。そして丸暗記するための方法として，ますます空虚になった先の「にこにこマーク」のようなものが考え出されるのである。（いろいろな指導者が自慢げに語る「にこにこマーク」は愚の骨頂である。）電卓の仕組みを知らなくても計算ができるように，速さや割合について本質的には理解していなくても計算できてしまう方法こそが，公式による理解なのである。

問題は算数教育だけにあるのではない。数学教育にも同様な問題がある。比重から言えば，算数に比べて数学は論理的であり公式主義的である。つまり，一度証明されたものを定理や公式として認め，必要がない限りは理由や起源にはふれず，定理や公式を前提として問題にあたる，ということになっているのである。場面によっては，公式を証明できなくても，使い方さえ知っていれば事足りるのである。だから，公式の証明をいっさいしない授業もあり得るのである。実際に，明治時代の帝国大学の工学部で，そういう指導法をとった外国人教授もいたという。私も前々任校において同様な指導法をとったし，前任校や本校においても，クラスによっては同様な指導をしていた。

しかし数学においても，論理だけでなく直観は大切である。数学には確かに公式化・形式化が必要である。形式化するためには，具体的なもの（直観的なもの）を抽象する必要がある。だが，抽象とは具体的なものを捨象することではない。抽象とは，具体的なものの括弧入れである。抽象された形式は，具体的なものを内包しているのでなければならない。記号や公式の背後には，というより，その内には意味やイメージがあるのでなければ

ならない。物理学者は例外なく，記号に包摂されているイメージをとらえることが大切であると強調する。理論物理学者が微分方程式を操作しているとき，理論物理学者の頭脳にはイメージがありありと浮かんでいる。イメージなき数学操作をするとき，物理学者は現実・自然から遠ざかってしまう。物理学科の中にも素養のないものがいて，空虚な数学操作をして突拍子もない結論を出したりする。たとえば，相対性原理である「光より速い物質は存在しない」という仮定は不自然なので，光より速い物質の存在を仮定する超相対性理論を講じたりするのである。事実と理論が転倒し倒錯してしまっている。はじめに事実や現実があるべきなのに，抽象的で内容のない理念が先行してしまっている。数学においても，よき研究者であるためには，論理とともに直観を作動させなければならない。

三角関数は，三角比を抽象し一般化して定義される。だが，角度の制限が 90 度未満のときには，三角比に一致する。三角比は，歴史的に言えば，古代エジプトにおいてナイル川の氾濫によって土地の区画がわからなくなるために研究されたものである。起源からして実践的であり，内容的にも直角三角形に結びついていて，具体的である。三角比を普遍化して三角関数を導いたとしても，直角三角形のイメージが背後にあるのでなければならない。

数学の教科書の構成は，歴史的なものを完全には排除していないため，具体的なものを辛うじて維持している。だが，単元の内容には行き過ぎた形式化が随所にみられる。そして何よりも，指導者の指導が問題である。公式を証明するや否や，公式を使う例題の説明に入り，演習に入る。これの繰り返しによって数学の授業は構成されている。ここではイメージを喚起するような教育はなされない。たとえば，「P ならば Q」が正しいとき，Q を P であるための必要条件，P を Q であるための十分条件，逆も成立するときお互いに必要十分条件という，と説明してすぐに例題に入る。そして，必要条件，十分条件，必要十分条件の判定法を機械的に説明するのである。本来，ここの説明で大事なことは，なぜ必要という言葉が使われ，また十分という言葉が使われるかということである。必要や十分の意味を説明することが必要なのである。だが，私の想像では，ここの説明をする指導者はほとんどいない。だから，必要条件や十分条件の意味を本当に理解している生徒は，形式的な説明から内容を読みとることのできる生徒だけである。それはほんの一握りの生徒だけだ。ここで大切なことは，直観による理解なのである。

しかし，直観による数学教育というのは，非常に困難な道である。なぜなら，教育全般が左脳に偏った教育になっていて，児童生徒の発想が左脳的になってしまっているからである。意味からの指導は，児童生徒を混乱に陥れる。意味からの指導が軌道に乗るためには，組織的にして忍耐強い指導が必要であると思われる。左脳に慣らされた児童生徒の頭脳を，少しずつ右脳的な発想へと変えていかなければならない。理解を急がせないことが肝要だ。理解できないとき，安易な道を児童生徒は求める。これに妥協してはならない。公式による理解は真の理解ではない。理解は茨の道であることを知らしめなければならない。いろいろな数学者が，証明の個々の論証を追えたとしても，すなわち論理的に自分で説明できたとしても，理解したとは思えないと語っている。数学者にとって大事なことは，

論証全体を直観的に理解することなのである。児童生徒の理解も，論理のレベルから直観の領域に高めなければならないのである。

そして，何よりも我々が考える道を困難にしているものは，右脳的発想に基づく算数数学教育の研究の歴史がない，という点である。私が 30 年も前にもった問題意識であるのにも関わらず，私の実践は失敗の歴史であった（もちろん成功例も少数ながらあるからこそこの小論があるのである），というのが正直なところであり，また，私と同一の問題意識をもった指導者は，私の知る範囲ではいないのである。以下の論考を読んで，１人でも多くの賛同者が現れ，直観数学教育の研究を，そして実践を共にしていく方が現れることを切に願うと同時に，才能あふれる共鳴者が研究を発展させ，算数数学教育を変革していくに違いない，ということを確信するものである。

第２章　実践編（対数の指導）　数学はイメージだ！

最初に，私の掲げる直観算数および直観数学のイメージをつかんでもらうために，私の実践においてもっとも成功した例を挙げたいと思う。それは対数の指導である。

私の前々任校は，俗に教育困難校とか底辺校と言われる学校であった。ある年の合格者の数学の平均点は，100 点満点のテストで 23 点であり，15 点以下の者が$\frac{1}{3}$に達したことがある。したがって，毎年一桁台の生徒が多数入学してくる高校であった。なかには 5−2+3 を 0 と答える生徒もいたのである。一昔前，ある工業高校の生徒が分数の計算ができないということで話題になったことがあるが，教育困難校と言われる高校においては，分数の計算が難しい計算であるということは常識なのである。したがって，前々任校における数学指導は困難を極めた。そして，生徒が理解できない代表的な章の一つが，指数・対数なのである。特に後半の対数は抽象度が高く，生徒たちにとって理解困難なものであった。私が，指導で困った例題の一つが，次の問題である。

［例題］　$\sqrt[5]{3}$ の近似値を求めよ。

［答案］　$x=\sqrt[5]{3}$ とおいて両辺の対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10} x &= \log_{10} \sqrt[5]{3} \\ &= \log_{10} 3^{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{5}\log_{10} 3 \\ &= \frac{1}{5}\times 0.4771 \\ &= 0.09542\end{aligned}$$

したがって，常用対数表から $x≒1.25$

この数式の操作の下にどんなイメージが隠されているか，読みとれるだろうか。指導者が潜在しているイメージを紐解いてあげない限り，ほとんどの生徒は読みとることが不可能である。前々任校の生徒たちでは 100％不可能である。私の想像では，今これを読んでいる先生方でさえ，読みとるのは困難なのではないだろうか。私自身これをさっと読んだとき，すぐには理解した気持ちになれなかった。もちろん個々の展開は追うことができたし，また，何も見ないで生徒たちに説明することはできた。しかし，何か腑に落ちないものがあったのである。そうだ，直観的理解ができていないのだ。

私は，直観的に生徒たちに理解させる方法を模索した。試行錯誤を重ねた結果，指数・対数の章は次のように指導することにした。

導入	ある中学生の発見	1 時間
展開	教科書の指導	15 時間
まとめ	対数の意味	1 時間（先の例題の説明）

この指導によって，前々任校のほとんどの生徒たちが，対数のイメージをつかみ，先の例題を解けるようになった。「数学ってこんなに奥が深いのか」という感想を書いた女子生徒もいた。また，１年間の授業の最後に書いてもらう感想文に，もっとも感動した章として「指数・対数」を挙げていた生徒もいた。私事になるが，ほとんどの生徒が先の例題を解けるようになったことがあまりにも嬉しくて，こう指導したらうまくいったんだ，という話を妻（妻は国語科の高校教員である）にしたら，「高校時代は，対数って少しも意味がわからなかったけど，この説明で対数のイメージがよくつかめた。私も高校時代にこういう先生に巡り会えたら，数学を好きになっていたかもしれない」と言われたことを付け加えさせていただきたい。

また，前任校の校内研究授業において，対数の意味の部分を扱い，校長先生をはじめとしていろいろな先生から御教示をいただいた。研究授業自体は，内容を欲張りすぎて２時間分を１時間の中に詰め込んでしまったので失敗であったが，研究授業の後の授業研究で，授業の問題点をご指摘いただき大変参考になった。ここで学んだ点を含めて，指導展開例を評述してみたいと思う。

導入　ある中学生の発見		1 時間
展開　教科書の指導		15 時間
まとめ	対数の意味(1)	1 時間（簡易計算器の作成）
	対数の意味(2)	1 時間（先の例題の説明）
問題演習		2 時間

以下の記述は，導入と対数の意味(2)については前々任校における実践を基にしたノンフィクションであり，対数の意味(1)は，前任校における研究授業を参考にはしているが，フィクションである。

◆導入　ある中学生の発見（１時間）

「今日はある天才中学生について話をする。その中学生が，２年生のときに発見したことについてである」と言って授業を開始する。そして，黒板の左の上の方に大きく 2 と書く。次に生徒を順番に指名し，今黒板に書いた数字の 2 倍を次々に言わせ，その数字を右へ右へと書いていく。2，4，8，16，32，・・・というようにだんだん計算が大変になってくる。これだけで生徒は緊張し計算に没頭し，これからいったい何が起きるのかという期待が教室中に充満してくる。桁数が 5，6 桁になると，「次は私だ」と生徒は大変緊張しているので，この辺で指名を打ち切る。

「さて，今計算してもらった数字に今から黄色で番号を打っていく。そうすると不思議なことが起きる」と言って 2，4，8，・・・と白チョークで大きく書かれている数字の上に，小さく黄色チョークで番号を振っていく。すると以下のような表が完成する。

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	4	8	16	32	64
7	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
128	256	512	1024	2048	4096
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
8192	16384	32768	65536	131072	262144
19	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*
524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216

次に，持参した電卓を一番前の生徒に渡して，「先生は普段計算を間違ってばかりいるけど，実は暗算の天才だったんだ」と言って，以下の計算など５題ぐらいを瞬時に計算し，その計算が正しいことを電卓を渡した生徒に確認させる。

$256 \times 16384 = 4194304$

$128 \times 8192 = 1048576$

はじめは生徒たちは不思議そうな顔をしているが，４，５題計算していくうちに計算原理がわかり，にやにやする生徒が出始める。そして，次にわり算に入る。

$1048576 \div 512 = 2048$

$16777216 \div 32768 = 512$

わり算では，かけ算の原理がわかっていた生徒は１，２題で計算方法がわかり，にっこりしている。また，かけ算がわからなかった生徒の中にも，４，５題わり算を計算していくうちにかけ算，わり算の両方の計算方法がわかってくる生徒がかなり出てくる。この段階で累乗算に入る。

$16^5 = 1048576$

$8^8 = 16777216$

累乗算の計算は，さすがにわかる生徒は少数のようだ。しかし，教室の$\frac{1}{3}$ぐらいの生徒

は，かけ算，わり算については計算原理がわかり，他の生徒に小さな声で教え始める。普段は怖い私も，このときは生徒たちが教え合っている姿をにこにこ見ている。頃合いをみて，少年の発見をまとめる。

7	+	*9*	=	*16*
128	×	512	＝	65536
22	−	*15*	=	*7*
4194304	÷	32768	＝	128
4	×	*5*	=	*20*
16	の	5 乗	＝	1048576

「つまり黄色の数字（表ではイタリックの小さめの数字）を使えば，かけ算は足し算で，わり算は引き算で，累乗算はかけ算でできることを発見したわけだ。少年はこれを発見したとき，あまりにも不思議で，この表を魔法の表ないしはコンピューターの表と呼んだんだ」と言うと，女子生徒からは「かわいい」という声が出る。さらに，私は少年が偉大だった点にふれる。「少年はこの表を喜ぶと共に，すぐに不満を覚える。この表は確かに便利だが，この表に載っている数字以外は計算ができない。そこで少年は，表の一般化を考えた。2 と 4 の間には 3 がある。3 にも 1 と 2 の間の数で対応する黄色の数字があるはずだ。さらに，4 と 8 の間の 5，6，7 についても，2 と 3 の間の数でだんだんに大きくなっていく黄色の数が対応しているはずだ。その数を全部見つけてやれば，あらゆるかけ算は足し算で，わり算は引き算で，累乗算はかけ算でできるはずだ。そして，少年はその数字をすべて見つけてやろうと，努力するのである」だが，中学 2 年生だった彼にはそれは不可能な課題だった，と言って話を次に移す。

黄色の数字（表ではイタリックの小さめの数字）が，これから学んでいく対数であることを教える。そして，白色の数字（表ではイタリックになっていない大きめの数字）を真数という，と言い，下のような表を提示する。

真数の国	×	÷	n 乗
対数の国	＋	−	n 倍

「真数の国と対数の国では，話す単語が違うだけでなく，文法も違うわけだ。そして文

法の対応表がこの表というわけさ。」

中学２年生が発見したことは，実は約 300 年前にすでに発見されていたことを告げる。

「発見者はネピアという人である。ネピアと言ってもティッシュペーパーとは何の関係もない（生徒の笑い)。コンピュータのない時代，天文学者にとって，膨大な桁数を扱う計算は悩みの種だった。しかし，ネピアが対数の表を作ってくれたおかげで，天文学者の寿命は延びたということだ。」

こうして１時間の授業を終えるわけだが，もちろん授業の最後には「ところで，その天才中学生って誰？」と聞くのを忘れない。みえみえの話なので，おおかたの生徒はにやにやしていて答えない。ところが，とぼけた生徒が必ずいて，いかにも私は気がついたという感じで「それは先生です」と答える生徒がいるのである。こうして，私はにっこりと笑って，チャイムを聞くのである。

◆展開　教科書の学習（10 時間～15 時間）

ここでの指導は，とりたてて工夫があるわけではない。通常の指導である。ただ，前々任校か前任校かによって，指導時間が違うのはもちろんのことである。前任校においても，習熟度別クラスの違いに応じて，説明の詳しさや問題演習の質と量が変わってくる。前々任校や前任校でも，習熟度の高くないクラスでは，問題演習は教科書のレベルに限定されるべきである。そして，説明は丁寧でなければならない（といっても前任校の場合，習熟度別やコース別の授業でも，クラス内の格差が大きくて限界があった。学力が上の生徒の要望にも応えてやらなければならないからだ)。

ここで，一般にある誤解を解いておきたい。前々任校では，入試の成績が 15 点以下の者が$\dfrac{1}{3}$にも達し，分数の計算はもちろんのこと，簡単な正負の計算さえできない生徒がクラスに少なからずいた。また，一般受験では大学でも短大でも合格できる生徒は一人もいなかったし，また期待もできなかったので，指導にはかなりゆとりがある部分があった。前任校のように，受験に対応するために必ず教科書を終わらせなければならないということはなかった。そこで次のような考え方もないわけではない。

「分数の足し算や簡単な正負の計算もできない生徒たちに，あえて高校数学を学ばせなくてもいいのではないか。受験という制約がないなら，基礎のない生徒たちのためにあえて背伸びせず，中学校や小学校の基礎に戻って指導してあげてもいいのではないか。」

実は上の考え方は，大変な誤解なのである。栃木県高教研数学部会の研究紀要に投稿した「数学教育論（学力観のコペルニクス的転回)」に書いたことなので詳しくは書かないが，上の考え方は誤った学力観に基づいているのである。誤った学力観というのは以下の考え方である。

「中学で学ぶ数学は小学校で学ぶ算数より難しく，また高校で学ぶ数学は中学校で学ぶ数学より難しい。そして，数学は積み重ねの学問なので，基礎のない生徒に高校数学を学ばせることは難しい。」

そして，むしろ生徒に高校数学を強いるのは指導者の自己満足であるとさえ思う方もいらっしゃるであろう。しかしそれは，生徒の学力の構造を知らない，完全な誤解である。標準の学力に達しない生徒たちの学習能力における最大の問題点は「理解力」ではなく「記憶力」にある。彼らは理解したとしても，20 分も自転車をこいでいるうちに，すべてを忘却してしまうのである。だから，体系的に基礎を学習しなおしたとしても，何も残らないのである。

だが，彼らは「理解力」をもっていないわけではない。丁寧に指導すれば，高校数学でも理解できるのである。基礎の不足については，現在の単元の中で必要に応じて補ってあげればいいのである。たとえば，定積分を計算するときには分数の計算が必要になるので，このときに約分や通分などを教えてあげれば済むのである。我々が丁寧に指導してやって，彼らが高校数学を理解できたときの喜びは，通常考えられているより遙かに大きい。私がその場面に最初に遭遇したときにはびっくりするほどであった。理由は簡単である。彼らは小学校中学年以降，算数や数学を一度も理解したことがないからである。

詳細については，前稿「数学教育論（学力観のコペルニクス的転回）」を是非読んでいただくことにして，話を本筋に戻そう。右脳数学と言っても，左脳を無視するわけではない。はじめに書いたように，左脳と右脳の協同が大切なのである。言い換えると，論理と直観の結合が大切だということである。通常の指導は，直観の部分が抜け落ちて論理に偏った教育になってしまっている，と言っているにすぎないのである。だから右脳数学においても，記号による指導は当然のことながら行われなければならない。（ただし，式を変形する操作においてイメージが喚起されるかということを問題にする。物理の指導に比べれば，この部分は非常に軽視されていると言ってよい。）だから，この展開においては，論理的な指導に力点が置かれて行われる。つまり導入においては，直観やイメージに比重が置かれ，展開においては論理中心の指導がなされ，再びまとめにおいて直観を強調して，論理と直観の統合をはかろうという構想なのである。

◆まとめ　対数の意味(1)（簡易計算器　1 時間）

ここでは，割り箸を使って計算尺を作らせ，計算尺を使っていろいろな計算をさせた後，どうして計算ができるのかを考えさせる。はじめに導入で使った天才中学生の発見を，印刷して配布しておく。

天才中学生の発見

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	4	8	16	32	64
7	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
128	256	512	1024	2048	4096
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
8192	16384	32768	65536	131072	262144
19	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*
524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216

7 ＋ *9* ＝ *16*

128 × 512 ＝ 65536

22 － *15* ＝ *7*

4194304 ÷ 32768 ＝ 128

4 × *5* ＝ *20*

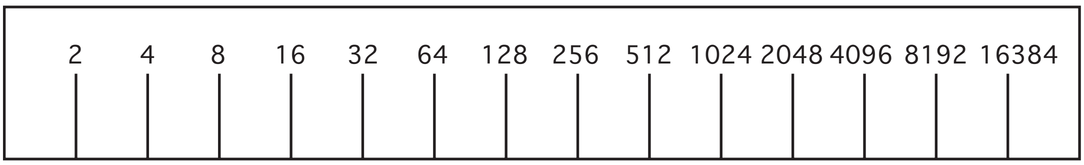
16 の 5 乗 ＝ 1048576

真数の国	×	÷	n 乗
対数の国	＋	－	n 倍

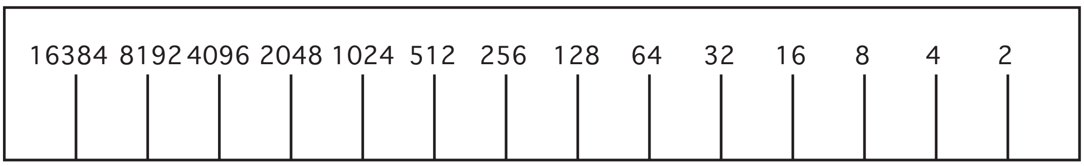
「今日はみんなにすばらしいものを作ってもらうぞ。かけ算，わり算ができてしまう不思議な計算器，計算尺の作成だ。材料は高価なものなので，先生のポケットから出させてもらった。材料はこれ（割り箸を見せる。生徒笑い）だ。総額は 180 円（生徒再び笑い）。計算器を作った後，どうして計算ができるのか，みんなで考えてみよう。ヒントは今配ったプリントの中にある。」

用意する材料…割り箸（生徒分），木材２本（目盛りを打っておく），プリント

はじめに実際の見本を見せながら作業手順を説明する。「さて，この巨大割り箸を見てごらん（生徒笑い）。この巨大割り箸のように，まず割り箸に等間隔に目盛りを打ってほしい。間隔は自由だが，1cm ぐらいが適当だろう。」

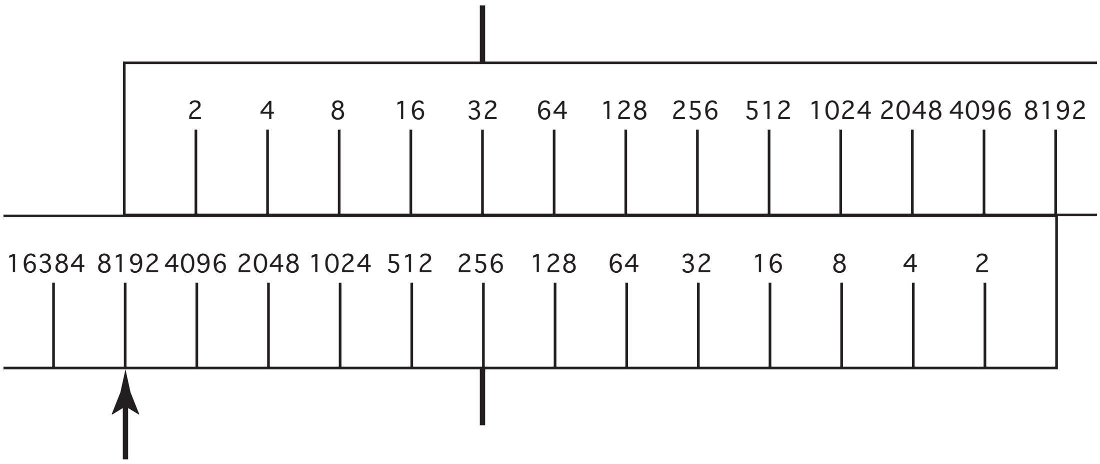


目盛りを打たせた後，上のように数字を記入させる。もう１本にも同様に目盛りを打たせ，さらに裏側にも等間隔に目盛りを打たせ，下のように数字を記入させる。



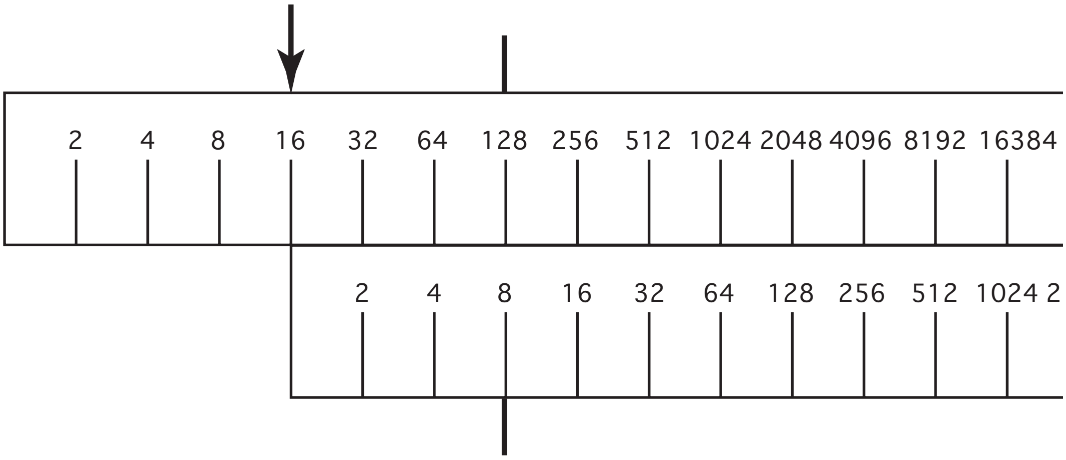
同方向に数字が記入されたものは，わり算用に使用され，逆方向に記入されたものは，かけ算用に使用される。つまり２本目の割り箸を表にしたり裏にしたりすると，かけ算やわり算ができるのである。表と裏の制作が終わったら，いよいよ簡易計算器による計算ということになる。まだ制作途中の生徒もいるので，一旦は制作をやめさせ，私の方を見るように指示する。そして，計算の仕方を説明する。

かけ算は，１本目と２本目の裏を使い次のように計算する。たとえば，32×256 ならば下図のように合わせる。



すると，左の矢印のところに答え 8192 が出ているのである。「あら不思議なことに一番左に答えが出ているではないか（生徒驚きの表情）。ほかの例で計算しても，必ず答えが出るね。さて，みんなも自分の割り箸を使って，計算してごらん。」生徒たちは計算に熱中する。お互いに問題を出し合ったり，筆算で確認したりしながら，生徒は驚きの度を深めている。頃合いをみてわり算の方に入る。

「さて，次はわり算に入るから，みんないったん作業をやめて先生の方を見てごらん。わり算は，２本目の表を使って計算するよ。巨大割り箸の２本目を反対にひっくりかえして，たとえば 128 と 8 を合わせると，128÷8 の答えが一番右側に 16 と出ている。その他で計算してもそうだ。今度はみんなが自分の割り箸を使って計算してごらん。割り箸をひっくり返すことを忘れないように。」生徒たちはまた計算に熱中する。生徒たちは感動を深めると同時に，どうして計算できるのかという疑問を深めることになる。

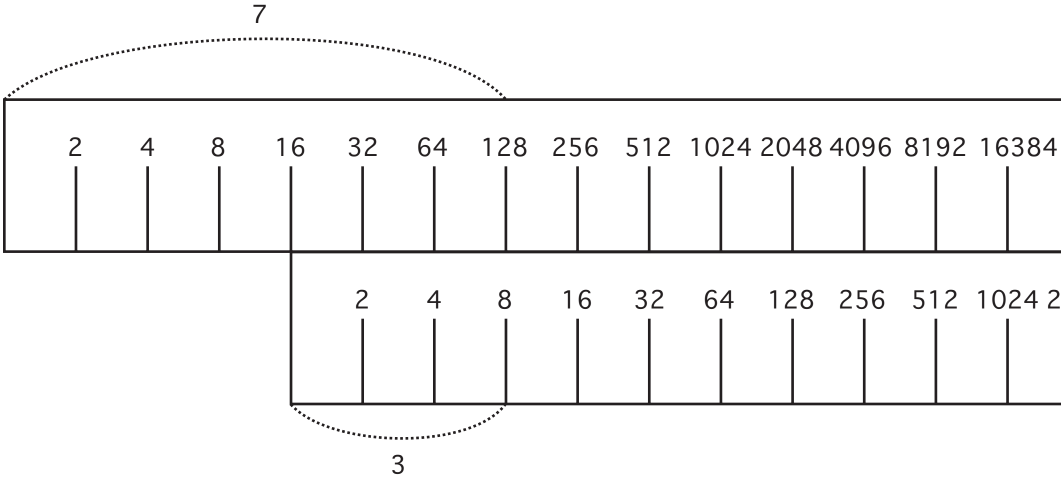


「どうだ，見事にわり算とかけ算ができてしまうだろう。本当に不思議なことだね。どうして，かけ算とわり算ができてしまうのか，考えてみよう。ヒントは最初に言ったようにプリント『天才中学生の発見』の中にある。よく考えてみよう。」

生徒に考えさせる。５分ぐらい時間をおいてから，複数を指名する。正解を言える生徒がいれば儲けものであるが，十中八九は答えられる生徒がいないと考えておいた方がいい。それでも，この考えさせる時間は貴重である。不思議さを深めさせ，印象の度合いを強めると同時に，一生懸命に頭を働かせるからである。このとき生徒たちは，左脳と右脳を協同させながら必死に考えるであろう。現代教育が失ってしまっているものの一つは，この考える時間である。

「そうだね。これは難しい問題だ。だからヒントを与えることにしよう。割り箸の目盛りのところに記入してある数字は，プリントの表のイタリックでない，大きめの数字と同じだ。この数字は真数だった。では表のイタリックになっている小さめの数字，すなわち対数は割り箸のどこに隠れているだろうか。」

上記のヒントを与えても，答えられる生徒がいれば，幸運な方である。何人かを指名する。４，５人も指名して答えられなければ，いよいよ指導者側が説明する。



「対数は割り箸の本当の長さだ。たとえば，左から数えて７目盛りのところに 128 とい

う数字がある。みんなの場合は１目盛り 1cm で打ったから，左端から 7cm のところに 128 があることになる。次に 8 を見ると，8 は左から３目盛りのところにあるから，左端から 3cm のところにあることになる。」

ここで生徒に考えさせる。２，３分も待つと A が手を挙げてくれた。「先生，計算尺が物理的にやっている計算は，

$$7-3=4$$

という計算です。これは対数の世界における計算です。それに対して，実際に記入してある数字は，真数の世界の言葉に翻訳した真数です。対数の国での引き算は，真数の国においてはわり算です。だから真数の国で考えたときには，つまり実際に記入してある数字で考えた場合には，わり算になるのです。」

「君は実にすばらしいことに気がつきましたね。あの天才中学生に負けないぐらいの天才的な発見です。君は実に偉い！ワンダフル！実にグッド！（生徒笑い）」

7	−	3	＝	4	対数
128	÷	8	＝	16	真数

かけ算でも同様である。つまり実際の長さが対数であり，計算尺では足し算を計算している。それを真数語に翻訳すれば，かけ算になるというわけだ。

「ここで対数の性質を復習してみよう。対数の性質は，３つあった。言える人いるかな。」B が手を挙げたので指名する。B に板書させる。

１． $\log_a RS \quad =\log_a R+\log_a S$

２． $\log_a (R\div S) \quad =\log_a R-\log_a S$

３． $\log_a R^p \quad =p\log_a R$

「ここで，この対数の性質の意味を考えてみよう。実は $\log_a$ は真数の言葉を対数の言葉に翻訳する機械，または翻訳しろという命令なんだ。だから $\log_a R$ は真数 R を対数語（r としておこう）に翻訳したものなんだ。$\log_a S$ は真数 S を対数語(s)に翻訳したものだ。すると $\log_a RS$ は真数 RS を対数語に翻訳したものということになる。だから公式が意味しているのは，真数の国におけるかけ算は，対数の国では足し算になるということになる。結局，３つの公式は，例の中学生が発見したことを式化したものだということになる。つまり，２番目の公式は，真数の国のわり算は対数の国では引き算ということだ。そして３番目の公式は，真数の国での p 乗は対数の国では p 倍というわけだ。」

$$\begin{array}{cccc} & R & \times & S \\ \log_a & & & \\ & r & + & s \end{array}$$

上の図を板書して，まとめとする。次時の予告として公式３の意味を考え，$\sqrt[5]{3}$ の計算を再度取り上げると言う。

◆対数の意味(2)　（１時間）

ここでは公式３の意味をもう一度考え，$\sqrt[5]{3}$ の記号操作の下に隠されていた意味（イメージ）を取り出すことを目標にする。最初に前時の復習をする。つまり，対数の３つの性質の意味は，中学生が発見した内容に他ならないことを復習する。

「性質１は，真数の世界でかけ算になるものは，対数の世界では足し算になる，ということを意味している。性質２は，真数の世界でわり算になるものは，対数の世界では引き算になる，ということを意味していた。性質３は，真数の世界で p 乗になるものは，対数の世界では p 倍になる，ということを意味していた。今日は性質３に焦点を当てたい。」そして，次の図を板書する。

$$\log_a \quad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "p\ \text{乗}"] \arrow[d, dotted] & R^p \\ \log_a R \arrow[r, "p\ \text{倍}"'] & p\log_a R \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

「さて，p101 の例 14 をもう１回復習してみよう。」

［例題］　$\sqrt[5]{3}$ の近似値を求めよ。

［答案］　$x=\sqrt[5]{3}$ とおいて両辺の対数をとると

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= \log_{10} \sqrt[5]{3} \\ &= \log_{10} 3^{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{5}\log_{10} 3 \\ &= \frac{1}{5}\times 0.4771 \\ &= 0.09542 \end{aligned}$$

したがって，常用対数表から $x≒1.25$

「今日は，この記号操作の下にどんな意味やイメージが隠されているのか考えてみることにしよう。」

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, "\frac{1}{5}\text{乗}"] \arrow[d, dotted, "\log_{10}"'] & \boxed{?} \\
0.4771 \arrow[r, "\frac{1}{5}\text{倍}"'] & 0.09542 \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

「1行目の $\log_{10}3$ という計算では，3 という真数語を常用対数語に翻訳するように要求している。実は，常用対数表は真数語から対数語へ翻訳する辞書であったわけだ。常用対数表から，真数語の 3 は対数語では 0.4771 である。そして，

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}\log_{10} 3 \\
&= \frac{1}{5}\times 0.4771 \\
&= 0.09542
\end{aligned}$$

という計算の各行は，１行目は真数の世界での p 乗は対数の世界では p 倍に相当することをいっている。２行目，３行目では計算して p 倍を出している。ここで再び辞書である常用対数表を利用する。今度は，対数語を真数語に翻訳するので，常用対数表を逆読みする。そして，3 の $\dfrac{1}{5}$ 乗は約 1.25 であるということがわかった，というわけだ。(生徒には，納得顔の生徒とまだ怪訝そうな顔をしている生徒がいる。どんなに筋が通った説明でも，１回で納得し理解することは難しいものである。だから，同じような例題で何回か説明し，そして演習することが絶対に不可欠である。この演習なしに理解したという気持ちにはなれないものだ。) 3 の $\dfrac{1}{5}$ 乗を正面から攻めていったら難攻不落のままであったろう。それを対数の世界に迂回することによって，落城させてしまったというわけだ。急がば回れだ。あるいは，玄関のドアは鍵がかかっていたので，勝手口に回って入り，内側から鍵を開けてしまったようなものだ（生徒笑い)。数学にも泥棒と同じような知恵が必要なんだ（生徒笑い)。迂路を得ることによって，秘密の扉はこじ開けられたのだ。」

この後，いくつかの類題を生徒に解かせる。

［類題］

I. $7^{\frac{3}{4}}$

II. 2^{30}

[I の解答]

$$
\begin{tikzcd}
7 \arrow[r, "\frac{3}{4}\text{乗}"] \arrow[d, dotted, "\log_{10}"'] & \boxed{4.3} \\
0.8451 \arrow[r, "\frac{3}{4}\text{倍}"'] & 0.6338 \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
$$

[II の解答]

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, "30\text{乗}"] \arrow[d, dotted, "\log_{10}"'] & \boxed{1.1\times10^{9}} \\
0.3010 \arrow[r, "30\text{倍}"'] & 9.03=0.03+9 \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
$$

何題か練習していくうちに，生徒たちはすべての類題が計算できるようになり，また，対数のイメージがつかめるようになるのである。前々任校でもほぼ 100%の生徒たちがこの問題を解けるようになった。

まとめとして次のように言う。

「数式操作や記号操作の背景には，というより数式操作や記号操作の内には，意味やイメージが必ずある。今回，例 14 の問題を通してその点がわかったと思う。イメージや意味がつかめれば，君たちにとって数学は身近なものになるはずだ。記号や式には，イメージが潜在している。潜在しているイメージをつかんでやることが大切であり，真の理解なのである。常にどんなイメージが潜在しているのか考える習慣をぜひともつけてほしい。」

以上が，まとめまでの展開例である。おそらく 2 回の授業によって，対数への興味（そして数学自体に対する興味も）は以前より深まっているはずである。この 2 回の授業の中には，割り箸で計算尺を作る作業学習が取り入れられているし，また，模式図を使って，イメージが喚起できるようになっている。普段より右脳はかなり刺激され，使われたはずである。

最後には問題演習の時間をとり，問題を解かせる。もちろんここでは，記号操作によって解かせるのである。前回 2 回の授業で痛切な印象をもっているので，式に潜んでいるイメージが何であるか考えるであろう。イメージは，生徒たちの力では必ずしもつかめるものではない。だが，努力するだけでも彼らの右脳は鍛えられるのである。右脳が鍛えられれば，少しずつイメージがつかめるようになるに違いないのである。もちろん，イメージ

がつかめないでへこたれそうになる場面では，指導者の援助が必要である。

第３章　算数教育の改革（理論編）

第１節　速さ

「時間＝道のり÷速さ」という公式ほどばかげた公式はない。誰が遅刻しそうになっているときに，時間は道のり÷速さだから時間を短縮するためには歩みの速度を上げなければならない，と考えるだろうか。このままでは遅刻だと思えば，反射的に走り出すであろう。論理など介在する余地なく，直観的に結論を出すのである。現在の算数教育は，この比喩のばかげた迂路を児童に強いているのである。直観算数では，実際の思考の働きと同じ発想をしよう，と提唱するのである。それは生活臭のある算数だ。

速さの単元で必要な事柄は「速さは単位時間あたりの道のりである」の一つだけである。これ以外何も必要でないし，これ以外何も教えるべきではない。速さの単元に出てくるすべての問題は，この一つさえ知っていれば解くことができるのである。「速さ＝道のり÷時間，道のり＝速さ×時間，時間＝道のり÷速さ」などの公式は，一切必要としない。

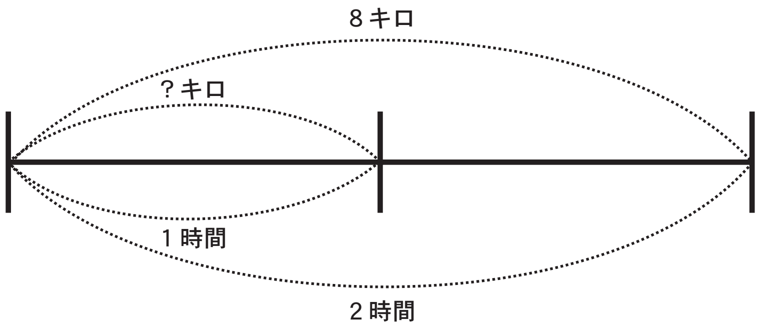
［例 1］道のり 8 キロを 2 時間で進むときの速さは，時速何キロか？

速さとは単位時間あたりの道のりである。時速のときは，1 時間あたりの道のりであるから，2 時間で 8 キロということは 1 時間あたりで

8÷2＝4

から時速 4 キロである。

この問題を考える際に大事なのは，下の図を書くことである。



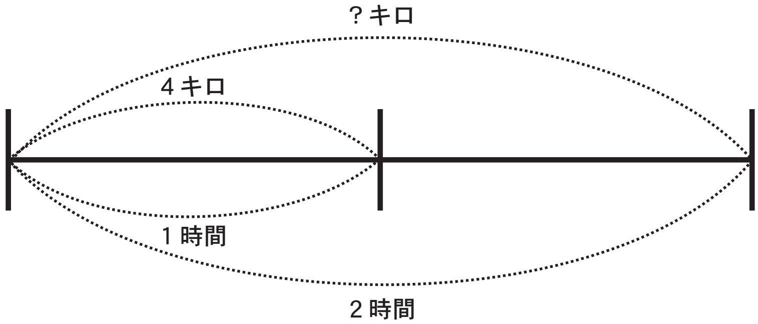
線分図を書くことが，直観を育てるために絶対に必要である。

［例 2］時速 4 キロで 2 時間進むときの道のりはいくらか？

1 時間で 4 キロだから，2 時間ではその 2 倍である。したがって，

4×2＝8

から 8 キロである。

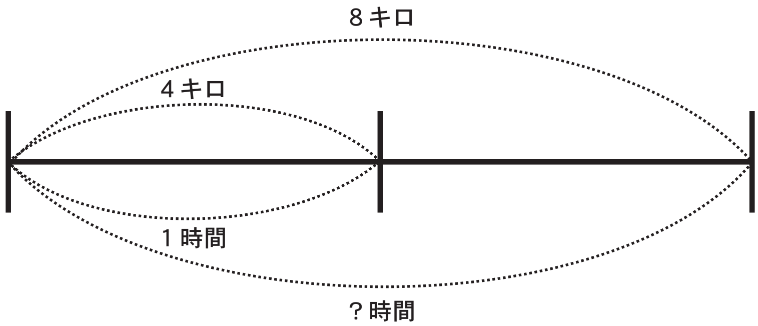


［例 3］8 キロの道のりを時速 4 キロで進むときの時間はいくらか？

1 時間で 4 キロ進むから，8 キロ進むのにかかる時間は，8 のなかに 4 がいくつ入っているかを考えればいい。

$$8\div4=2$$

の計算から 2 時間である。



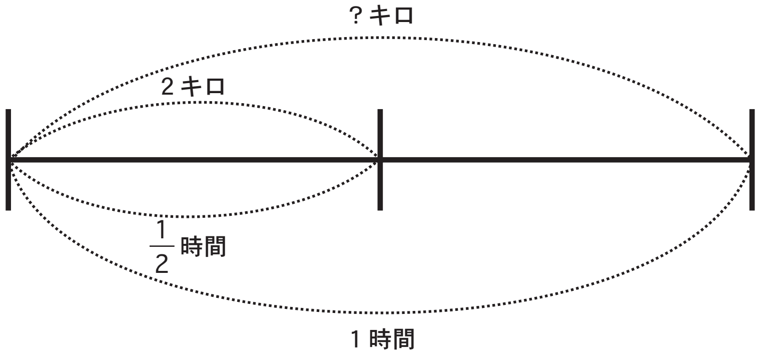
「以上の計算にどうして公式がいるだろうか。うまく指導すれば，直観的に答えられるようになるはずだ」と言いたいところであるが，実際は分数や小数が出てくると，児童は混乱してしまう。以下の例だ。

［例 4］道のり 2 キロを $\frac{1}{2}$ 時間で進むときの速さは，時速何キロか？

速さとは単位時間あたりの道のりである。時速のときは，1 時間あたりの道のりであるから，$\frac{1}{2}$ 時間で 2 キロということは，1 時間あたりで

$$2\div\frac{1}{2}=4$$

から時速 4 キロである。

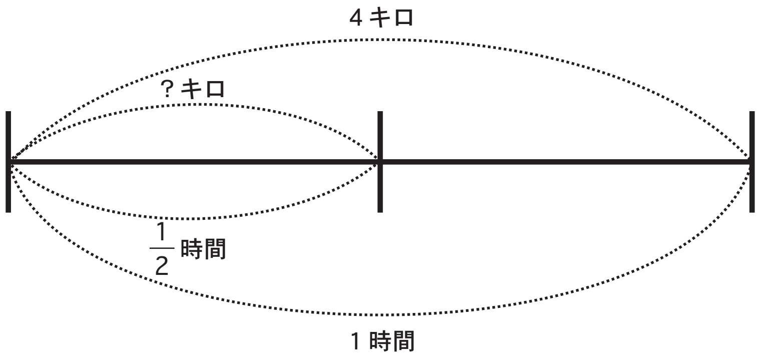


［例 5］時速 4 キロで$\frac{1}{2}$時間進むときの道のりはいくらか？

1 時間で 4 キロだから，$\frac{1}{2}$ 時間ではその$\frac{1}{2}$倍である。したがって，

$$4\times\frac{1}{2}=2$$

から 2 キロである。

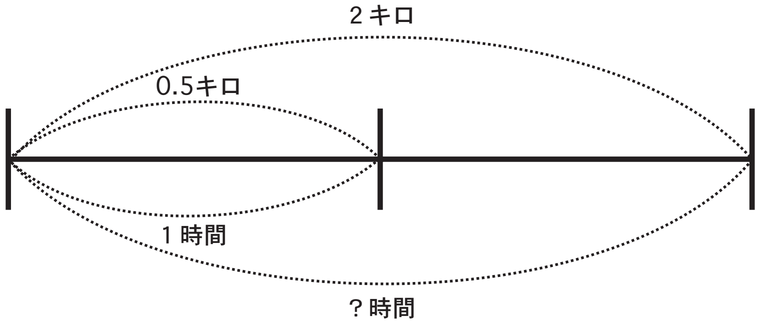


［例 6］2 キロの道のりを時速 0.5 キロで進むときの時間はいくらか？

1 時間で 0.5 キロ進むから，2 キロ進むのにかかる時間は，2 の中に 0.5 がいくつ入っていればいいかを考えればよい。

$$2\div0.5=4$$

の計算から 4 時間である。



例 4，5，6 は例 1，2，3 とそれぞれ同じであり，何も変わるところはない。ところが，左脳化している児童には，両者の同一性はまったくわからない。分数が入ってきた瞬間に，多くの児童は拒絶反応を示してしまう。彼らには類推的直観は働かない。ここの把握は，おそらくフッサールがいうところの本質直観とでも言うべきものである。本質直観とは，１つの類例から想像的変容によって本質すなわち普遍を把握してしまう直観である。

理論的な話は別にしても，なぜ彼らは本質的にまったく同じである例 1 と例 4 を別のものと考える，またはとらえてしまうのだろうか。それは，彼らの分数や小数の把握が不十分だからである。彼らの分数理解は，直観のレベルに達していないのである。言い換えれば，分数や小数を感覚的に把握していないのである。分数や小数が，血となり肉となっていないのだ。ここでも彼らの理解は，形式のレベルにとどまっている。$\frac{1}{2}$という場合，お饅頭の半分というように，具象的なものがイメージされていなければならない。ところが，先生たちは導入の段階でこそ，お饅頭やミカンなどを利用するであろうが，分数の途中の単元からは機械的な指導に終始してしまっているというのが実態ではないだろうか。分数の単元においてはもちろんのこと，いかなる段階でも（ということは，分数の指導が終わった後でもということである）指導者は，ミカンやお饅頭の比喩を入れて話してやるべきなのである。$\frac{1}{2}$という形式（入れ物）のなかに，半分のお饅頭や半分のミカンというイメージが，自由に出入りできるのでなければならない。

私は，形式のなかに内容が入ってくることを，フッサールの用語を借りて直観充当ないしは意味充当と呼ぶ。算数教育及び数学教育の中で決定的に不足しているものは，この直観充当すなわち意味充当である。私は，直観充当されて血となり肉となった算数及び数学を提唱しているのである。直観充当，意味充当は，それによって血となり肉となるのだから受肉と呼んでもいい。私が直観算数や直観数学と言う場合，それは受肉された算数や数学を意味している。イエス・キリストは受肉されて人間になったのだから，算数や数学の人間化と言ってもいい。

またまた話が理論的になってしまったので，話を元に戻そう。例１と例４の２つの式

$$8 \div 2 = 4 \qquad 2 \div \frac{1}{2} = 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

を比べたとき，確かに後半のわり算の方がわかりにくいことは事実である。30 年も前のことなので記憶は定かではないが，私はおそらく次のように処理していたと思う。

$$2 \times 2 = 4$$

後半の 2 は，1 時間は$\frac{1}{2}$時間の何倍かを示している。①の式にこだわることはない。問題を解くのにはどんな方法でもいいのである。いろいろな発想ができる方が，柔軟な頭脳を鍛えるのにいいのである。１つの方法に限定しない点が，右脳算数・右脳数学の眼目の

一つなのである。公式による指導は，方法を限定してしまう。

公式による指導がなぜ問題なのか。これについては後で，１つの章を設けて詳論する予定であるが，簡単に述べると「公式は本質を隠蔽し遮断する」ということである。つまり，なぜわり算になるのか，かけ算になるのか，という本質的な問いを遮断してしまい，思考を停止させてしまう。１回１回それぞれの問題場面において，かけ算になるかわり算になるかを本質から考えることが大切なのに，考えなくて済む方法が公式による方法なのである。考えなくても済むからこそ，児童は歓迎するのである。だが，これは右脳の遮断であり，右脳を休眠させる行為である。これでは右脳は鍛えられない。

先の①の式に話を戻そう。①の左の式はわかりやすい。１時間あたりの量を出すには，２分割してやればいいのだから。だが，例 4 において１時間あたりの量を出すのに，なぜわり算になるのかはわかりにくい。単位量あたりの量を出すにはわり算になると，いくつかの例を示して一般化してしまってもよいが，これは一種の公式化である。だが「速さ＝道のり÷時間」に比べれば，ずっと具象的である。なぜなら，線分図を媒介にして一般化しているからである。そして，より普遍化している。速さだけでなく，割合やその他の単元にも適用することのできる考え方であるからである。だから，右脳と左脳のもっともうまい協同例と言えないことはない。しかし，あくまで直観にこだわってみよう。

場面によっては考えにくい数字の場合，私は考えやすい数字になおして考えていた。つまり，例 4 を例 1 のような問題に変換して式を出していたわけだ。ここには類推的直観が作用している。フッサールがいうところの想像的変容による本質直観に相当するものであると思われる。これは私の一つの解決方法であったが，それ以外にもいろいろ思考していたような気がする。実際上の計算は先に書いたように，

$$2\times\left(1\div\frac{1}{2}\right)=4$$

と計算していたと思う。つまり，１時間のなかに$\frac{1}{2}$時間が何個入っているかを考え，２個入っているので２倍すると思考していたのである。ここには公式の入る余地はどこにもなかった。

次の例 5 についてみてみよう。時速 4 キロで$\frac{1}{2}$時間進む場合の道のりを求める問題であった。

$$4\times\frac{1}{2}=2$$

ここでも上の式は，公式を使わない限り多くの児童から出てこない。これは児童たちに$\frac{1}{2}$倍という概念がないためだ。これは，次の節で扱う割合の直観的理解ができていないという問題である。割合を理解することが，実は非常に重要なのである。例 6 を理解するた

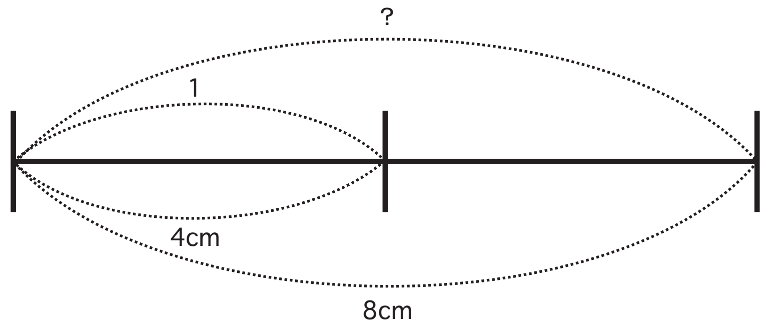
めにも，やはり割合の理解が大切である。

第 2 節　割合

算数のなかでもっとも重要でありながら，児童にとってもっとも苦手な単元は割合である。割合を理解するか理解しないかが，算数を好きにし得意にするか，嫌いにし苦手にしてしまうか，の分かれ目と言ってもいい。割合の理解が，速さなど他の単元の理解に決定的な影響を与える。割合のなかに算数の秘密の半分が入っていると言っても過言ではない。

割合の定義は「割合とは比べられる量がもとにする量の何倍であるかを示す量である」というものである。この定義に割合の単元で学ぶすべてが入っている。私が意味からの算数教育と言う場合，この定義以外何も教えるな！ということを意味している。つまり割合のすべての問題は，この定義に戻って考えよ，ということなのである。「割合＝比べられる量÷もとにする量」，「比べられる量＝もとにする量×割合」，「もとにする量＝比べられる量÷割合」の 3 つの公式は一切使う必要がない。使う必要がないどころか，公式は有害ですらある。「公式は本質を隠蔽する。」

［例 1］8cm の 4cm に対する割合を求めよ。



割合は，比べられる量がもとにする量の何倍であるかを示す数字である。したがって，この問題は 8cm が 4cm の何倍であるかと聞いている。つまり 8 のなかには 4 がいくつ入っているかと聞いているのである。だから，

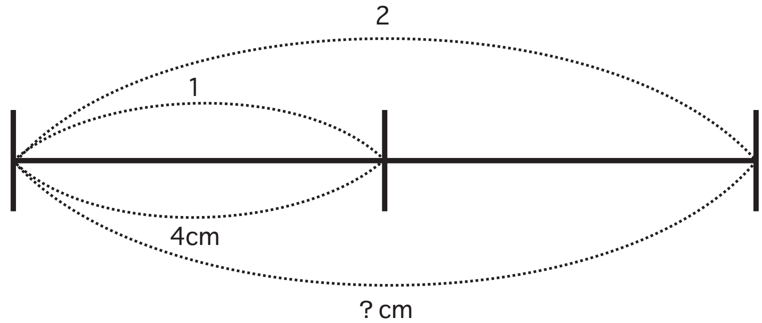
8÷4＝2

の計算から割合は 2 である。

線分図では，上に割合，下に実際の数や量が書かれている。上下の役割を決めてしまうと一種の公式主義になってしまうが，指導のはじめのうちははっきり決めておいた方がいい。割合が理解できなくなる大きな原因の一つが，実際の量と割合の混乱にある。実際の量は単位がある量であり，割合は単位のない量である。したがって，割合とはかなり抽象的な概念である。だが，鍛え方では割合という概念は直観の領域へ，すなわち右脳の領域に入って来るのである。車の運転を習いはじめのときには，坂道発進するにはサイドブレ

ーキを引いて，エンジンを吹かせてからブレーキを下ろす，と頭で反芻してから実際に行動しているだろう。ところが，熟練のドライバーはそんなことは考えず，反射的に行っているはずである。これは最初左脳の領域にあったものが，右脳の領域に移ったことを意味している。つまり論理から直観に移行したのである。先に，直観は論理を支える柱であると言ったが，逆に論理の反復が直観を形成していく場合もあるのである。「常に形式は内容的であり，常に内容は形式的である。」(ヘーゲル「小論理学」など)　割合についても，訓練を続けるうちに右脳の領域へ，つまり直観の領域に移っていけるのである。あくまで時間をかければということである。ここに時間をかけないで，性急な結果を求めるところに左脳主義に陥る原因がある。分数や小数についても，感覚的な理解がないのは訓練不足に起因する。後に評論する。

［例 2］4cm に対するあるものの割合が 2 である。あるものはいくつか。

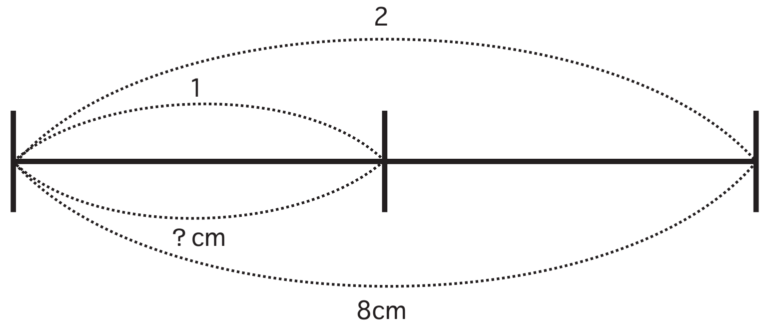


あるものは 4cm の 2 倍だといっているのだから

$$4\times2=8$$

の計算から 8cm である。

［例 3］あるものに対する 8cm の割合が 2 である。あるものを求めよ。



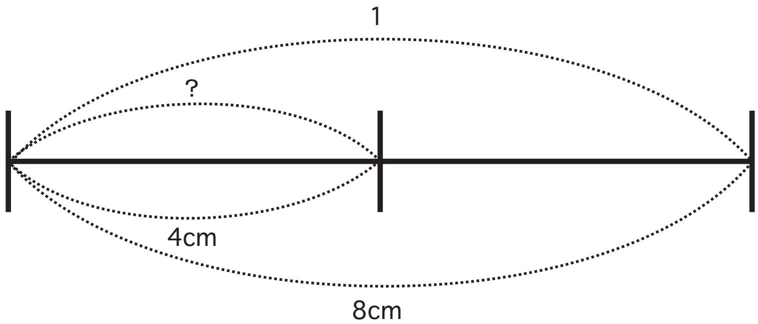
割合 2 で 8cm だから，割合 1 に対してはその半分で（あるいは 2 倍したら 8cm になるのだから）

$$8\div2=4 \qquad \text{ないしは} \qquad 8\times\frac{1}{2}=4$$

の計算から 4cm である。

以上，例 1 から例 3 まで，公式がいらないということは納得してもらえると思う。ところが問題は，速さのときと同じで，数値が分数や小数になるときである。つまり以下の例である。ここでも先の速さのときと同じ拒絶反応に出会うことになる。

［例 4］4cm の 8cm に対する割合を求めよ。

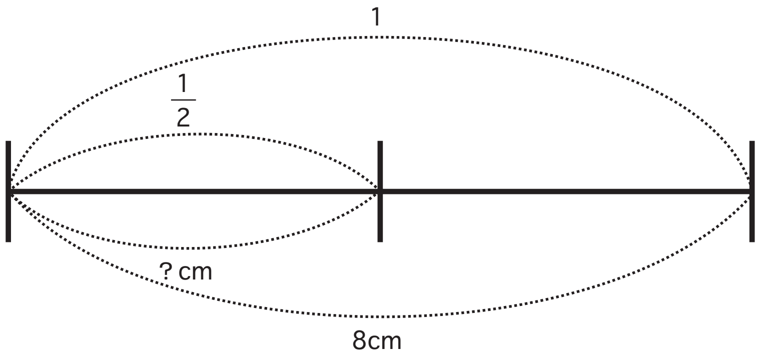


割合は，比べられる量がもとにする量の何倍であるかを示す数字である。したがって，この問題は 4cm が 8cm の何倍であるかと聞いている。つまり 4 のなかには 8 がいくつ入っているかと聞いているのである。だから，

$$4 \div 8 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

の計算から割合は $\frac{1}{2}$ である。

［例 5］8cm に対するあるものの割合が $\frac{1}{2}$ である。あるものはいくつか。

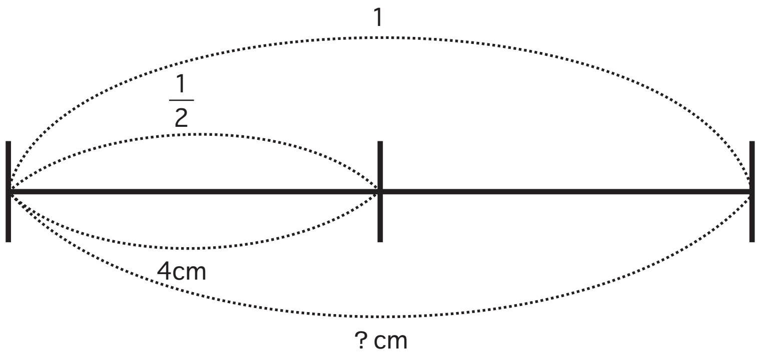


あるものは 8cm の $\frac{1}{2}$ 倍だといっているのだから

$$8 \times \frac{1}{2} = 4$$

の計算から 4cm である。

［例 6］あるものに対する 4cm の割合が$\frac{1}{2}$である。あるものを求めよ。



割合$\frac{1}{2}$で 4cm だから，割合 1 に対してはその 2 倍で（あるいは$\frac{1}{2}$倍したら 4cm になるのだから）

$$4\times2=8 \qquad \text{ないしは} \qquad 4\div\frac{1}{2}=8$$

の計算から 4cm である。速さの例 4 のときと同じで，後半のわり算は確かにわかりにくいので，単位あたりの量はわり算で出すという点だけ，公式化してもよい。

例 4 から例 6 までの拒絶反応については，速さのときと同じである。充分な訓練によって，分数が血となり肉となっていないための反応である。だから，分数指導ももちろん改革されなければならないが，しかし割合や速さの単元で決して公式を使用しないで，忍耐強く指導を続けるならば，分数に対するアレルギーもなくなっていくはずである。1 つ 1 つ丁寧にねばり強く説明して，児童を訓練させていけば必ず理解できるはずである。先に挙げた運転の例と同じで，ねばり強い指導によって直観の領域に移行できるはずである。絶対に性急な指導をしなければの話である。

第４章　数学教育の改革（理論編）

第１節　文字式の計算

数学は算数に比べれば，ずっと論理的で左脳的である。しかし数学においても，第２章の実践編で示したようにイメージや直観がやはり使われるべきである。文字式の指導では，イメージはどのように使われるべきであろうか。中学生がよく間違える文字式の計算例は，次のものである。

$$3a-a=3a \qquad\qquad 3a-a=3$$

右脳を使う数学なら，上記の間違いは絶対に起きない。形式的な指導に終始するために引き起こされる間違いなのである。「リンゴが３個ありました。リンゴを１個取ったら（食べたら）リンゴはいくつ残りますか。」この問いに，リンゴは３個残ると答える中学生がいるだろうか。もしいたら「世の中はそんなに甘くないぞ。３個あって１個食べても３個残り続けるなら働く必要がなくなってしまう。もっと極端な例を出せば，３万円から１万円出しても３万円残り続けるなら，３万円で一生生きていけることになる。」後半の間違いはもっと傑作である。「３個のリンゴからリンゴを取ったら３が残ります」と答えているのである。$3a-a$ という計算は，論理的には分配法則を使って

$$3a-a=(3-1)a=2a$$

と計算されている。中学生たちの問題は，計算の根拠を理解しないで（この場合は分配法則）機械的に文字式の計算を理解してしまうことなのである。たとえば，$5a-2a$ の計算は $5-2$ を計算して，答えに a を添えると。確かにこの計算規則は正しい。参考書もそうまとめているし，先生もそういう説明をするに違いない。生徒たちは，安易な理解を求める。生徒たちは，なぜ計算できるのかを考えようとしない。当然である。算数教育で，考えない習慣を身につけてしまったのだから。

前々任校の生徒たちも，定理や公式の証明を極端に嫌がったものである。彼らは理由や証明などを説明しないで，いきなり公式を提示することを要求するのである。これに対して，筑波大学の付属高校で教育実習をした友人から聞いた話によると，「先生，今提示した定理を証明してください。私たちは，証明されたもの以外を受け取ってはならないと教えられています。」付属高校の生徒の質問は，決して教習生をいじめるための質問ではない。当然の要求である。土台のはっきりしないものを提示され，その土台の上に乗れと言われたら不安になるのは当然のことである。

多くの中学生たちの問題点は，イメージ，根拠，計算規則の往来が自由にできない点である。計算規則を学んでしまうと，それ以外の思考ができなくなってしまう。問題に応じて柔軟に切り替えられる頭脳をつくることが肝要である。あるいは，いろいろな角度から１つの問題を考えられるようにしてやることが重要である。多くの中学生たちは，別解を極端に嫌がる。別解を提示されるとわからなくなると多くの中学生が言う。中学生たちは，頭脳労働の経済原則に従おうとするからである。なるべく頭脳労働を節約しようとするわけだ。考えないで済むようにしたいのである。

１つの問題を，いろいろな視点から考えられるようにしなければならない。その際に直観やイメージを働かせることが大切である。計算規則で考えると，$3a-a$ は $3a$ かもしれないが，イメージで考えるとおかしいと気がつくことが大切なのである。

第２節　必要条件・十分条件・必要十分条件

この３つの条件ほど，大切な条件でありながら誤解されている条件はないような気がする。ある推理もののテレビ番組で，犯人を証明する条件として「必要十分条件」だと叫ぶ

場面がある。この場面の誤解は，十分条件であると言えば済むところなのに，それに必要を付け加えることで，条件がより強まっていると考えている点である。数学的に言えば，条件として必要十分条件より厳しいあるいは強い条件は，十分条件である。条件の強さから言えば，

十分条件≧必要十分条件≧必要条件・・・・・①

という関係が成り立つ。だが，一般的なイメージでは必要十分条件が一番厳しい条件に映るのであろう。物理学科や数学科に進学してくる学生の中にも，残念ながら理解していない学生がいるというのが現実である。彼らの理解は，機械的な理解にとどまっている。先に，条件の強さから言えばということで式を書いたが，条件に該当する対象の集合の広がりで言えば，

十分条件≦必要十分条件≦必要条件・・・・・②

という関係が成り立つ。条件が強いほど，当てはまるものが少なくなるという当然のことである。しかし，①②が混同の原因の一つになっているようである。

必要条件，十分条件の理解は非常に重要である。これは証明，論証の基礎である。数学のすべての問題に関わっていると言っても，決して過言ではない。記述式の大部分の問題が，「①必要条件から十分条件へ②必要十分条件へ」のいずれかの方法によって，あるいは両者の組み合わせによって，論証されているのである。数学教育の意義の一つは，論理そのものの仕組みを理解させることにある。したがって，必要条件や十分条件の理解は，是非ともさせなければならないのである。

はじめに書いたように，ここでの指導は次のように行われている。

$p \to q$・・・・・(A)

が真である場合，q を p であるための必要条件，p を q であるための十分条件といい，

$q \to p$・・・・・(B)

も成立しているとき，p を q であるための必要十分条件，q を p であるための必要十分条件であると指導してから，必要条件であるか，十分条件であるか，必要十分条件であるかの判定法を例題によって指導するのである。たとえば例題は次のものである。

「次の p，q について，p が q であるための必要条件ならば①，十分条件ならば②，必要十分条件ならば③，必要条件でも十分条件でもないなら④として，もっとも適するものを番号で答えよ。

(1)　$p : X<0$，$q : X^2 \neq 0$

(2)　p：X は素数，q：X は奇数

(3)　X，Y は複素数とする。$p : X^2+Y^2=0$，$q : X=Y=0$

(4)　△ABC で，p：△ABC は直角三角形，$q : AB^2+BC^2=CA^2$　」

判定方法は，(A)，(B)が成り立つかどうかである。たとえば，(1)では(A)は成り立つが(B)は成り立たないので，②だというわけだ。そして，全部解説した後，類題を解かせるので

ある。類題を何題も解かせれば，確かに判定できるようにはなるだろう。しかし，これは左脳による理解であって，右脳による理解ではない。言い換えれば，論理による理解であって，直観的理解ではない。肝要なのはなぜ必要という言葉が使われ，十分という言葉が使われるのか，ということである。

誰が考え，誰が日本語に訳したのか私は知らないが，必要条件・十分条件・必要十分条件という用語は，実によくできた用語である。学を発展させていくためには，概念装置がしっかりしているかどうかが決定的であるが，数学の概念・用語はよくできている。例えば，関数という概念だ。この概念が数学を発展させただけでなく，分析哲学に大きな影響を与えたことはよく知られている。必要条件・十分条件もすばらしい用語の一つだ。だから，普段から右脳を使う習慣のある生徒は，先の定義や判定法の説明だけで，直観的に理解できるであろう。だが，現在の教育によってほとんどの生徒は左脳化してしまっているので，理解できないのである。だから，イメージがわくように指導者が工夫してやらなければならない。私は，次のような比喩を必ず入れる。

「結婚相手の条件

①高収入（年収 1,000 万円以上）

②身長 180cm 以上

③ルックスがいい

④性格がいい

以上全部の条件がそろった場合に結婚するというなら，４つの条件を全部あわせたものが，必要十分条件です。そして，１つ１つは必要条件です。また，３つ以下でも必要条件です。さらにその４つに次の条件

⑤趣味が一致する

⑥爺婆抜きである

などが付け加えられれば十分条件ということにならないかい。」

この例はあくまで比喩である。そこでもっと正確にイメージをつかむために次の例に入る。

「p：偶数　　q：6 の倍数

p は q であるための必要条件である。なぜなら奇数では，6 の倍数であることはできないからだ。6 の倍数であるためには，偶数であることが必要なのです。だが，偶数という条件だけで十分かといえば，十分ではないですね。例えば，4 は偶数だけど 6 の倍数ではない。6 の倍数であるためには，もう一つ条件が必要です。それは 3 の倍数であるという条件です。したがって，

p：偶数　　r：3 の倍数　　q：6 の倍数

とすると，p や r はそれぞれ q であるための必要条件だが十分条件ではない。だが，p と r

の両方がそろえば，十分だから必要十分条件ということになる。」

確かにいくつかの例を説明しても，なかなかイメージはつかめるものではない。しかし，イメージをつかんでいるかどうかは決定的なことなので，時間をかけても理解させるべきである。一度理解してしまえば，それ以降の数学理解が，理解していないよりはすんなりとするはずである。

第５章　歴史的論理的

ここでは，教材はどういう順番で並べられ，構成されるべきであるかという問題について意見を述べてみたい。スプートニクショックやガガーリンショックで，アメリカが数学教育の現代化ということに取り組んだことがあった。その中の論争に，教材は歴史的に並べられるべきであるか，演繹的に並べられるべきであるか，というものがあった。現代化という運動の中には，数学教育の効率を上げるために，今までの歴史的に並べた構成から演繹的な構成に変えるべきだ，という意見があった。私が高校生の頃，初めてこの論争を聞いたとき，どちらかと言うと演繹的な再構成の方が正しいのではないかと考えていたが，この論考を考えるようになってからは，教材は歴史的な発展に即して語られるべきであると考えるようになった。以下，その理由を述べてみよう。

歴史的な数学の発展は，具体的なものから普遍的なものへの発展である。演繹的構成は，これを逆にして普遍的なものから具体的なものを導き出す構成である。マルクスは具体的なものから出発し，抽象していくことによって普遍的なものを導く方法を下向法，抽象的なものから具体的なものへの旅立ちを上向法と呼んだが，この用語を借りれば，教科書の構成は上向法的であるべきか，下向法的であるべきかということになる。いずれの方法についても，普遍的なものと具体的なものとの結合がある。我々の用語法では，内容（直観）と形式の結合がある。両者の違いは，論理から出発するのか，直観から出発するのかということである。

両者共に大事な方法であるのは，疑いのないことである。しかし，右脳を鍛えるという観点から考えるならば，歴史的な発展にしたがうべきであると思う。数学史や科学史の発展においては，直観から出発して抽象的なものを見いだしてきた。ある程度発展した段階で，演繹的構成が可能になるのである。ユークリッドが幾何学を体系化するまでには，かなりの研究の蓄積があったのである。学の発展は「具体から普遍へ，普遍から具体へ」という順番で行われているのだから，教育もこの順番で行うべきである。つまり直観からの出発ということだ。というのは，演繹的方法は，初めのうちは抽象的で具体的なものが入っていない。つまり純粋な形式になってしまっている。それに対して，「具体から普遍」への方法は，具体的なものを最後まで維持し続ける。というのは，後で詳論するように，抽象化は決して具体の捨象ではなく，具体の括弧入れなのである。普遍は干からびた普遍でなく，ヘーゲルがいう具体的普遍でなければならない。

はじめにも書いたように，幸運なことにどちらかと言うと現在の教科書は歴史的な発展の順に即して記述されている。例えば，三角関数の指導はいきなり単位円の定義から出発して，角度が 90 度未満では三角比に一致すると示す指導方法もあったわけだが，教科書では三角比を勉強してからそれを普遍化して三角関数に入る，という構成をとっている。中学 1 年生における正負の計算の章も，非常によく構成されている。はじめは，5－2 は 5 引く 2 であった。ところが負の数を勉強すると，

$$5-2=5+(-2)$$

というように，引き算を足し算に直せることがわかる。そこで数学の世界から引き算を追放して，すべては足し算であると考え，5－2 は 5**+(**－2**)**の太字部分を省略したもので 5 マイナス 2 と解釈し直すのである。すなわち，5 引く 2 は 5 マイナス 2 へとアウフヘーベン（止揚）されるのである。具体的なものから論理的なものへと記述されている。

しかし，三角関数にしても今の 5 マイナス 2 にしても，背景には三角比と 5 引く 2 がそれぞれあるのでなければならない。つまり形式となった入れ物に，いつでも意味充当ないしは直観充当がなされるのでなければならない。指導者は，一度抽象的な世界に入ると，抽象的なまま指導を続けてしまう傾向がある。ここに大きな問題点があるのである。指導者は，常に普遍的なものと具体的なものを往復しなければならないのである。

第 6 章　数学と物理

ここでは，数学は得意であるのに，物理はまったくダメという人がなぜいるのか，ということを考えてみたい。おそらく文系の人からみると，数学も物理も同じようにみえるのではないだろうか。少なくとも物理の得意であった私には，数学も物理も同じようなものだった。ところが不思議なもので，数学は非常に得意であるのに物理は苦手でどうしようもないという人がいるのである。私の推測では，物理は苦手であるというタイプは論理的なタイプ，すなわち左脳的なタイプの人なのではないだろうか。数式操作や論理的推論は得意なのであるが，イメージや直観を使って考えることが比較的苦手なのではないだろうか。物理の得意な人は，傾向としては右脳タイプの人が多いのではないか。つまり数学が得意な人は，左脳タイプと右脳タイプというように左右両方に分布しているのに対して，物理が得意な人は，右寄りに分布しているのではないか，ということだ。

以上の推論の根拠は，物理学者が例外なく，記号操作のなかに潜むイメージの大切さを強調するからである。しかし，今言ったことはあくまでも傾向として言えることであって，物理学者の中にも論理的なタイプの人はいるのである。また，論理的なタイプの数学者にしても直観を大切にしていることは，いろいろな数学者が直観の大切さを説いていることからわかる。

ただ一つだけ言えることがある。直観を協同させない，純粋に論理的なタイプの人は，物理には向かないということだ。理論物理であったとしてもである。というのは，物理の対象は自然であり，現実であるからである。理論物理学者は，論理を駆使するにしても，

常にそれを自然から検証させて，自然が NO といえば，自分の論理を引き下げる人でなければならないからである。超相対性理論の信奉者たちは，こう考える。「光速より速い物理現象がないと考えるのは不自然だ。だから光速より速い物理現象を仮定してみよう」と言う。そして，過去に行くことさえ可能だと，主張するのである。これは本末転倒の考え方である。アインシュタインが光速を超える自然現象がないと仮定したのは，そう仮定すると自然現象がうまく説明できるからなのである。はじめに原理や方程式があるのではない。物理学者の絶対的にして侵すことのできない前提は自然である。

第７章　概念装置の検証

新しい運動が成功するかしないかは，提唱者の概念装置がしっかりしたものであるかどうかにかかっている。概念装置は，土台または基礎工事に相当するものだからである。直観，具体的普遍，形式と内容などの概念装置について，検証してみることにしよう。

私が直観という言葉に託している意味は広く深い。例えば，この直観の中にはカントのいう「感性的直観」という意味も入っているし，フッサールのいう「本質直観」という意味も含まれている，というように。先の例で示した半分のお饅頭や半分のミカンは，「感性的直観」すなわち感覚の例になる。割合や速さのところで書いた類推的直観は，「本質直観」の例である。さらにこの直観の中に私は，勘や直感のような内容も含めて考えたい。さらに直観の中には，必ずしも具体的なものでない，第２章の実践編で示した模式図のようなものも含めて考えてみたいのである。模式図は，半分はイメージでありながら半分は論理的である。以上のように，私が直観と呼んでいるものは非常に幅が広いのである。直観という概念の中にいろいろなものを含めることで，柔軟にして多面的な指導ができると思われるからである。

直観は，「具体的なもの」や「内容」と同義のものと考えていい。それに対して，論理は「形式」「普遍的なもの」「抽象的なもの」などと深い関連を有している。形式が意味している範囲も広い。この中には公式や定理も入っているし，普遍的なものという意味も入っている。そして，形式や普遍の中には２通りの意味が入っている。１つは，干からびた形式や普遍，あるいは意味や具体を蒸留された形式や普遍であり，他の１つは内容の充実した形式や普遍である。後者の形式や普遍を「内容的形式」「具体的普遍」（これはヘーゲルから借りた概念だ）と呼びたいと思う。前者での形式や普遍が，我々が批判しようとしている立場であり，その批判のための概念装置が後者である。

前者の干からびた普遍とは，俗に蒸留法と言われる方法で抽象した普遍のことである。鉄や鉛やスズなどは，色や形や比重などの性質が違っている。これらのすべての性質を蒸留し捨象するならば，金属一般が抽象される。抽象されるために，金属一般はすべての性質を捨て去ってしまっている。したがって，ここには何も残留していない。あるのは無である。これが干からびた普遍である。

それに対して，我々の「内容的形式」ないし「具体的普遍」は，具体的なものを決して

捨象しないので，内容豊富である。「具体的なものは常に普遍的であり，普遍的なものは常に具体的である。」（ヘーゲル）　我々の立場の抽象は，具体的なものの捨象ではなく，具体的なものの括弧入れであり，あるいは潜在化である。我々にとっての金属一般は，鉄や鉛やアルミニウムなどの諸性質を潜在させている。金属一般は，鉄や鉛やアルミのどの諸性質をも内包している。

記号や式という形式の中には，具体的な内容や意味が潜在しているのでなければならない。我々の目指す数学は，記号や式の操作をしているときに，頭脳にはイメージがありありと浮かんでいるのでなければならないのである。

第８章　公式による指導の問題点

行論の途中で予告しておいた，算数における公式による指導の問題点を考察してみよう。

１．公式による理解は真の理解ではない。

公式による理解は，具体的なものを捨象する理解であり，本当の理解ではない。この理解は先に書いた「干からびた形式」による理解である。そこにはイメージはどこにもない。公式は干からびた形式である。内容が捨象されているので，教科書の問題なら解けるであろうが，生活や科学研究などの実際的な場面ではまったく応用できない。日本において，ノーベル賞の受賞者が先進国の中でも極端に少ないのは，公式による指導が要因の一つなのではないだろうか。算数指導の充実は，ノーベル賞の受賞者を増やすには絶対不可欠であると思われる。算数が直観数学を形成していくための基礎を成すものであるからである。我々の指導は，直観から始まり，普遍＝形式へと進む指導でなければならない。そのためには，算数から公式を追放して，算数を直観化しておく必要があるのである。直観算数で十分に右脳を鍛えられた生徒にとって，たとえ数学指導が形式的な指導に終始したとしても，そこから内容を読みとることは，すなわち形式に意味充当ないし直観充当することは，それほど難しいことではないからである。我々の運動の基本は，算数の直観化である。肝要なことは受肉である。血もあり肉もある算数なのである。

２．公式は本質を隠蔽し，右脳の活動を遮断する。

公式による指導のもっとも大きな問題点は，右脳の活動を遮断することである。大事なことは，１回１回原初的な場面に戻り，かけ算になるのか，わり算になるかなどを考えることであるのに，公式を導入した瞬間にこの本質的な問いを隠蔽してしまう。考えなくても済む方法が公式による理解である。これは思考の経済原則にしたがっている。思考の節約である。考えなくても済むのだから児童が大歓迎するのは当然である。公式によって考えるとき，右脳は休眠状態におかれる。したがって，直観は育たない。毎回毎回右脳に，かけ算になるのかわり算になるのかと聞くことが大切なのに，公式はこの問いを遮断してしまう。車の運転が論理の領域から直観の領域に移行していくのに大切なことが練習であ

り訓練であるのと同様，算数においても訓練が大切なのに，この訓練を放棄してしまうことになるのである。訓練なしに直観は育たない。訓練は，常に毎回毎回原初的な場面に立ち返って問うことによってなされる。公式は原初的な問いを遮断してしまう。

あとがき

私は能力が低く頭が悪いのに，小学校時代は授業以外何も勉強しなくても，算数は常にクラスでトップだった。これはたまたま私が，右脳（直観）を使う習性があったからにすぎない。ところが，中学に行き算数が数学に変わると，１年生のときはごく平凡な成績しかとれなかった。算数ではいい成績だったのに，数学になるとダメになる生徒がいると聞いていて，私もそれなのかとがっかりしていた。

しかし，２年生になり先生が替わると，突然私の数学の成績は学年でダントツのトップに躍り出るのである。(中学校始まって以来の大天才とまで，２年生のときの先生は兄に対して言って下さったという。）私は，つい最近まで，１年生のときの先生は嫌いではなかったが，先生との相性の問題であると思っていた。しかし，右脳（直観）数学の問題意識をもつようになってからは，大きな意味が隠されていたのではないかと考えるようになった。それは，１年という時間は，私の極端に右脳化されていた発想を左脳的な発想に変えていくために必要な時間であったのではないか，ということである。つまり，左脳を右脳に協働させるのに１年の時間を要したのではないだろうか。

能力も低く，勉強も授業以外は１秒もしたことのない私が，なぜ，学年でトップになれたのであろうか。直観算数によって，右脳を使うことを習慣づけられていたためであると思われる。右脳を鍛えられていたことで，形式から内容を読みとる独自の思考スタイルを獲得していたためであると思われるのである。

以上の個人的経験が，私が右脳数学（直観数学）構想を書いた動機なのである。

一つだけ断り書きをさせていただきたい。私は医学（大脳生理学）については全くの素人なので，本稿で言っている思考方法が右脳によるものであるか確信をもっているわけではない。もしそこに問題があるとすれば，右脳と書いた部分は直観という言葉に置き換えて読んでいただければと思う。

本稿を読んで共感をもたれた方がいたら，是非とも直観算数・直観数学教育を研究し，実践されることを切に願っていることを，再度強調してまとめに代えたい。