数学教育論（学力観のコペルニクス的転回）

ＸＸ高校

前奏曲

　ある日の１年生の教室
　生徒たちは黙々と因数定理による因数分解をしている。ｆ（１）、ｆ（２）、ｆ（－１）などの式の値を計算し、０になるものを探し出し因数を見つけ、組立除法を実行し、ｆ（ｘ）の次数を落とし、最後に２次式の因数分解を実行している。一人の例外もなくである。誰も私語をしない。誰もよそ見をしない。誰も寝ていない。一心不乱に全員が、計算に没頭している。教室は水を打ったように静かである。する音は、シャープペンをカリカリと忙しく動かしている音だけである。また、別の日の教室をみるならば、生徒は２次関数を一般形から標準形に変形し、頂点の座標・軸の方程式などを書き、グラフを書き、そのグラフを定義域で切り、最大値・最小値を計算している。この日も例外なく全員がである。これが本当に、正負の計算もできず、かけ算九九でさえあやふやな生徒たちであったのであろうか。入試の成績が、１桁台で入ってきた生徒たちが、因数定理を自在に操り、定義域付きの２次関数の最大値・最小値の問題をすらすら解いているのである。驚異としか言いようがない。生徒たちは魔法にかけられたのであろうか。この教室は魔法にかけられたのであろうか。

序章　新しい学力観について

　最近あちらこちらで、新しい学力観の話が聞かれるようになった。猫も杓子も新しい学力観の話をしている。新しい学力観によれば、今までの学力観には生徒の意欲・関心などが考慮されてこなかった、という。生徒の意欲を喚起する指導が大切であるそうだ。だが、果たして今まで生徒の意欲を問題にしなかった指導者がいたのであろうか。もしいたとすれば、その人には即座に辞表を提出してもらわなければならないし、またそれはそういう人を採用した文部省や教育委員会の責任である。生徒の意欲が、アプリオリに存在しないことなど自明なことである。
　さらに、新しい学力観によれば、いくら努力しても成果が上がらない生徒がいるという。生徒は多様化している。能力も様々だ。生徒の多様性に対応した指導をしなければならない、というわけだ。したがって、成果が上がらなくても意欲があり努力している生徒は評価してやらなければならないと言う。何と

いう矛盾であろうか。成果のない意欲などかつて地球上に一度でも存在したことがあるのだろうか。また、意欲のない成果も存在したことがあっただろうか。意欲と成果は切り離しがたい両契機であって、バラバラに考えることはできない。それは、いわば磁石のＮ極とＳ極の関係である。相互に前提しあっていて、互いに浸透している。成果が、あがらない、それは単に指導の問題である。端的に言えば、指導が適切でないのである。先天的に能力不足の生徒がいることは、否定することはできない。指導は科学的になされなければならない。教育とは科学的技術である。したがって、能力の問題を看過するわけには行かない。だが、私の実践が証明するところによれば、正しい指導さえすれば、必ず成果は上がるのである。

文部省はもっと現場の大変さを理解し、現場における真摯な取り組みに耳を傾けるべきである。ツメ現場の声をすくい上げる努力をもっとすべきである。そういう努力がなされていれば、今回の学習指導要領の改正（改悪）などなかったはずである。

第１章　本校の実態

進学校の先生たちが、一度でも底辺校とか教育困難校と言われる学校に足を踏み入れたならば、驚愕するに違いない。そこでは、あなたたちの理念など跡形もなく痕跡をとどめることなく吹き飛んでしまうだろう。教育の理念などのきれい事が通用しない世界が、現実に存在するのである。テレビドラマ「ハイスクール落書き」は仮構の世界であると思っている先生方は多いのではないだろうか。仮構までいかないにしろ多少の誇張があると思っている先生方は多いであろう。だが、ドラマで描かれていた世界はまさに現実のものなのである。授業中に机を勝手に移動しトランプをし、ウォークマンを聴き、他方ではゲームをしている。教室の中にいる生徒はまだいい。授業中に何人もの生徒が愚連隊をなし廊下や校外をたむろするのである。授業中に爆竹は鳴り、壁には卑わいないたずら書きがなされる。ガラスやデッキなどの公共物が破損されるのである。このような荒れた学校を一度でも体験したならば、履修と修得を分けるなどというばかげた考えは決して浮かばないに違いない。本校においても荒れた時期があった。学校の荒廃は現実のものなのである。（誤解のないように言っておきたい。今は大変落ちついている。服装も県北でもっとも優秀な学校の一つであると言えるし、生徒も大変素直である。うまずたゆまない我々の指導の成果である。）

話が少し脱線したので話を元に戻そう。本校の生徒の実態、これがこの章のテーマであった。もちろんここでの報告は、数学の学力面に関してだけ語られる。ある年の合格者の入試の平均点は１００点満点で２３点であり、１５点以下は１３５名中４５名に達する。１５点以下だけで１クラスができてしまうのである。したがって、一桁台の生徒は毎年たくさんいる。簡単な因数分解もできず、正負の計算もできない生徒は珍しくない。－２－２が０になってしまう

生徒はクラスの１／４にも達する。なかには５－３＋２を０と答えた生徒もいた。これは小学校１年生でも答えられる問題である。さらにかけ算九九も瞬時には答えられない生徒もいる。１／２を小数に直すことのできない生徒も少なからずいる。進学校の先生が、本校に来るならば大きなカルチャーショックを受けるに違いない。２次関数の一般形の標準形への変形を何度説明してもいや何十回説明しても、理解できない現実を目のあたりにするであろう。実際に本校にきてノイローゼ近くなった先生もいる。私もその一人だ。

次に態度面についてみてみよう。入学当初のアンケートによれば、９割の生徒が数学が嫌いであると答えている。同アンケートによれば、小学校低学年から算数が嫌いであった生徒も多数いる。多数の生徒に聞くと小学校高学年からノートとったこともないし、授業に参加したこともないと言う。むしろ私語するなどして授業妨害をしていたのである。数学の授業というだけで憂鬱になってしまうのだ。まじめな女の子でも、授業中はノートを取らず、絵を描いたりしていたという。全般的に数学嫌いが多い。数学アレルギーだ。ツメ学力面からみても、態度面からみても生徒の学力は基礎もできていないといえよう。

したがって本校と同レベル学校の先生たちが、生徒たちに高校数学を教授することは不可能だと考えたとは十分理解できる。中学校の数学も理解していない、下手をすれば小学校低学年の学力しかない生徒たちに高校数学を教えることなどは不可能だというわけである。したがって、高校数学から始めることは断念して、中学校や小学校の教科書を与えてみようというわけだ。あるいは基礎の教材をつくり、与えてみようというわけだ。

また、本校と同レベルの学校の先生たちが、生徒たちは特別の動機付けをしなければ、数学に興味を示すことないと考えたことも、無理からぬことである。数学と聞いただけでアレルギー反応を起こす生徒、あるいは眠くなってしまう生徒が多数なのである。どんなに情熱的に数学はおもしろいと熱弁したところで、右から左へと抜けてしまう。というより聞く耳を持っていないのである。先生たちの嘆きは非常によく理解できる。

第２章　生徒は本当に数学が嫌いか。

だが、生徒たちは本当に数学が嫌いなのであろうか。いかなる教師の情熱も跳ね返してしまうほど、彼らの殻は固いのであろうか。彼らに数学の魅力を理解させることは不可能なのであろうか。しかしながら、彼らはアプリオリに数学が嫌いであったわけではない。ここでは数学が嫌いになった理由を考えてみよう。

結論から言えば、生徒は嫌いにさせられているのである。小学校や中学校の算数教育や数学教育によって。では小学校や中学校の先生に原因があるのだろうか。そうではない。確かに、一部の教師に問題はある。例えば、分数の足し算のときなぜ通分するのかという質問や分数のわり算のときなぜ逆数をかけるのかという質問に対して答えられず、「そんなこと考えず言われたとおりにや

るのよ。」とか「決まりだからよ。」などと答える教師がいたりする。一つには教材研究不足であるが、教師はいつでも質問には答えられるわけではない。質問に答えられないとき教師がとるべき態度は、「なかなか良い質問ね。先生もわからないから一緒に考えてみようよ。」などと答え、生徒児童に興味を持たせることが必要である。生徒を誉め、興味を持続させてやることが必要なのである。別の例では、ある小学１年生がある質問をした。質問の内容については覚えていないが、その質問にはある鋭い洞察が含まれていた。だが、教師は成績の良くないその児童の質問を無視したのである。この教師がとるべきことは、「～君すごいことに気がついたね。君の考えたこと先生も気がつかなかったわ。」と言い、生徒の洞察を誉めるべきなのである。

したがって、一部の教師に問題があることは否定する事はできない。だが、大部分の先生方は情熱的であるし、教育熱心である。子どもが好きで先生になった人が多く、高校の先生に比べれば、先生になった動機については純粋である。子どもが好きだというのは、教師にとって決定的な条件である。残念ながら高校の教師の中には、子どもが好きでもないのに、例えば数学を教えるのが好きだからという理由でなった人がいる。これは自家撞着的動機である。なぜなら子どもの実態を知ることなく教えることなど不可能だからである。教えるとは、自分の立場とは違う相手の立場に立つことである。大人の住んでいる世界と子どもが住んでいる世界は、次元の違う世界である。パラダイムが違うのである。子どもが好きでなければ、パラダイムの違う世界に降りていくことなど不可能だ。したがって、子ども好きであるということは決定的条件なのである。この点において、小中学校の先生方は優れた方が多いといえよう。彼らは教育熱心である。例えば、私は中学校で実習をしたのであるが、教育実習で私を指導してくださった先生は、頭の診療所と名付け、正負の計算のできない生徒たちの補習をしていた。教師になって６年目であったにも関わらず、この先生の教えは今でも非常に私に大きな影響を与えている。

では、なぜ数学嫌いができてしまうのだろうか。原因は二つである。一つは、能力差の問題である。もっと正確に言うならば、１クラスの人数の問題である。生徒の能力差があるということは疑いのない事実である。ここを誤って認識してしまうならば、教育は科学的ではなくなってしまう。能力差は非常に大きい。それにも関わらず、一つの教室に４０人近くもいれて指導することは不可能なのである。一斉指導で行われる場合、標準は真ん中の生徒児童に置かれる。するとどうしても中以下の生徒児童はおいていかなければならなくなる。落ちこぼれの原因だ。ここに第二の要因が加わる。受験競争の問題である。第一の原因だけであるならば、補習をするなどである程度は救われよう。しかし、その時間はないのである。受験に対応するために、前へ前へと進まなければならない。落ちこぼれの生徒たちをおいて置かざるを得ないのである。こうして数学嫌いの生徒たちが生産されることになる。

第３章　学力不振生徒の学力・能力の構造（彼らは一度も理解したことがないのか。）

　したがって、確かに数学嫌いができあがる必然性があるのであるが、彼らの学力について誤解してはならない。それは、彼らが一度も算数や数学の基礎を理解したことがないのではないということである。基礎を理解したことがないために現在の状態があるわけではないということである。２章でも言ったように、小学校や中学校の先生たちがいろいろな諸制約があったにしろ、決して学力不振の生徒たちを、何もせず放置していたのではない。可能な範囲で、小中学校の先生たちは、補習などをし、あるいは個別指導などをし、ふつうの生徒以上に面倒をみてきたのである。そういう先生たちの努力によって、学力不振の生徒たちも一度は理解した体験を多く持っているのである。
　それでは、彼らにおいては何が問題なのであろうか。私もＸＸ高校に赴任してからおよそ6年間に渡り特別指導の名の下に、学力不振の生徒たちをマンツーマンに近い形で指導してきた。特別指導は普段の授業ではわからない、いろいろな生徒の側面を知ることができる。私は新しくＸＸ高校に赴任してきた先生方には、必ずこの個別指導を勧めている。生徒の実態を把握するのに最も優れた方法の一つである。学力不振の生徒の学力の構造を把握することができる。どんな点で生徒たちが誤解をし、どんな点がわかりにくいのかを把握できるのである。後で詳しく評論するが、どんな点がわかりにくいのかという問題は、指導者がどんなに教科書や参考書などで教材を研究してもわからない。指導者にとってわかりやすいということと生徒にとってわかりやすいということは天と地ほど違うからなのである。この論考においてすでに指摘したし、これからも再三に渡って指摘することであるが、生徒の住んでいる世界と指導者が住んでいる世界は次元の違う世界なのである。私はそれぞれが住んでいる世界、あるいは発想の基盤・座標、認識の枠組・エピスティーメをパラダイムと呼ぶ。この用語を使うならば、生徒のパラダイムは指導者のパラダイムとは違う。それはユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学のパラダイムが違ように違うのである。この点はいくら強調しても強調しすぎということはない。指導者は常に独善に陥ってはいけない。生徒から学ばなければならないのである。生徒は、先生の最大の先生である。
　さて、生徒の学力というより能力の問題点はいったい何であろうか。最大の問題点は、彼らの学力が持続しないということなのである。正負の計算など、指導すれば彼らに理解させることはできる。しかしながら、すぐに忘れてしまうのである。彼らの記憶力は、１日いや場合によっては数十分しか持続しない。理解できたとしても、２０～３０分も自転車を漕いで家に帰るまでに彼らの脳

髄から消えてしまうのである。指導をうまずたゆまず何度も繰り返したとしてもである。

もう一つの問題点は、スイッチの切り替えができないということである。公式の使い方を指導した後で、この公式を直接使う問題を与えると生徒は解くことができる。しかしながら、いろいろな公式を使う問題がアトランダムに並んでいるととたんにできなくなってしまう。例えば、第１章で出した例であるが、５－３＋２を０と答えた生徒がいる。この生徒が決して小学校１年生程度の学力しかないわけではない。正負の計算を指導した後だったので、誤ってしまったのである。この問題は中学１年で学ぶ正負の計算ではなく、小学１年生でもできる問題であるというようにスイッチの切り替えができないのである。逆の側面もある。数学と物理で全く同じ問題、例えば三角比の問題や速さの問題が出てきたとき、彼らは別の問題であると思ってしまう。彼らにはチャンネルは一つしかない。狭視野が彼らの特徴である。柔軟に考えられないのである。

第３の問題点をあげると、一つの問題の中にいくつかの要素が入っていると、彼らは混乱してしまう。教科書の例題を何回説明しても理解できない理由は、教科書の例題が新しい要素をいくつも混入しているためなのである。すぐにメモリーオーバーを起こしてしまう。

第４の問題点は、抽象的思考を徹底的に苦手としているということである。５＞３は理解できても、Ｘ＞３は理解できないのである。ここでのＸは、４でもあるし５でもあるしその他でもあるし、逆に４でも５でもその他でもない一般的なもの・抽象的なものである。文字が入ると巨大なる拒否反応を示すのである。α、β などの新しい文字が出てくるだけでそこになにか深遠な意味があるのではないかと思ってしまう。Ｘ＞３をさらに数直線に書くとなると混乱の度合いは、極限に達する。この点に関連して第５の問題点が出てくる。

それは、彼らの思考は常に意味やイメージを伴っていないということである。これは彼らの思考が左脳だけに偏っているということである。極端に手順化しているものしか、彼らの頭脳は受け付けない。その思考には常に意味が伴っていない。彼らに概念を理解させることは非常に困難なのである。意味のない計算以上のことをさせるには、相当の工夫を必要とする。彼らが右脳を使わないのは、彼らの能力だけの問題ではない。現代の算数及び数学教育の問題である。残念ながら、現在の教育は左脳中心の指導である。生徒が理解できないとき、安易な指導は手順化でありアルゴリズム化である。われわれは、アルゴリズム化に頼りすぎているのである。この現代算数・数学教育の問題点、すなわち左脳に偏った教育になっているという問題点に関しては、後に独立の論文を書く予定である。また、第５章の小ステップ教育でももう一度触れられるだろう。とにかく、われわれが右脳を使う指導をしていたならば、ノーベル賞の受賞者はもっと多かったはずである。ツメ細かく論じれば、まだまだ彼らの問題点はある。しかし、後論のために必要な論点はすでにそろった。その中でも特に必要な論点は、第１と第２で指摘した点すなわち忘却と狭視野（スイッチの切り

替えができない）である。その点を確認して、この論考において最も大事な核心をなす次の考察に移ることにしよう。

第４章　弾力的学力観

かつて教育困難校の先生方が、生徒たちは基礎学力がない、したがって小中の基礎に戻り遅れを取り戻さなければならないと考え、高校生に小学校や中学校の教科書を与えたことがあった。その情熱は是非とも認めなければならないが、根本的に誤った考えである。高校生のプライドという問題を差し引いたとしてもである。基礎に戻らなければならない、という考えの基底にあるものは次のような学力観である。数学は積み重ねの学問である。そして基礎から出発し、学年の進行とともに次第に複雑になり高度になっていく。したがって、小学校よりも中学校の数学の方が難しく、さらに、中一よりは中二の方が難しい。一般的に、基礎がなければ次の学習は不可能ではないにしろ困難である、と考えられているのである。こうした学力観の中で、Ａ君は中学２年程度の学力だとか、Ｂ君は小学校中学年程度の学力しかないなどと評価されるのである。私はこれを固定的学力観と呼んでおきたい。

この固定的学力観には二つの認識の誤りがある。一つは、学力不振生徒たちは理解力がないために、基礎ができないと考えている点である。これは全く誤った考えである。第３章で述べたように、学力不振生徒たちの能力の問題点は、理解力というより記憶力の方にあるのである。すでに述べたように小中学校の先生方は、落ちこぼれをつくるまいと熱心である。学力不振生徒児童などに補習などをし、一度は彼らに理解させたことが多いのである。高校に入学してくる学力不振生徒たちは、先生たちが放置していたためにそうなったのではなく、９年間に渡り先生方が可能な範囲で努力した結果生まれたのである。うまずたゆまない努力の結果生まれたのである。それをたった数年間で取り戻そうというのが、小中の教科書を与えようという考えなのである。

第二の誤りの点に話を移そう。一般的には、学年が進行すればするほど難しくなると考えられている。例えば、微分は小４、５で学ぶ分数の計算より難しい、というわけだ。これはある意味では正しい。ある意味ではというのは、指導者のパラダイムにおいてはということである。指導者の座標・地平においては、微分が高等数学であることは疑いのない真理である。

だが、コペルニクス的転回をして座標を生徒のパラダイムに移すならば、様相は一変してしまう。生徒にとっては微分の初歩の計算ならば、分数の足し算・引き算の方が難しいのである。たとえば、$Y=X^n$の微分を考えてみたまえ。この計算のアルゴリズムは、分数の足し算よりはるかに簡単である。実はこっちこそが真理なのである。この簡単な真理をわれわれは見落としているのである。よく考えてみると、このような事例はたくさんある。本来から言えば、というより指導者の立場から言えば、次の二次方程式は前者のほうがはるかに簡単である。

①　$X(X-2)=0$　　　　　　　　　②　$X^2+3X+2=0$

ところが、生徒にとって簡単なのは後者のほうである。指導者にとって簡単ということと生徒にとって簡単ということは、天と地ほどの差があるのである。

だから、この観点に立ったとき学年が上に行けばいくほど難しくなるとはいえないのである。したがって、あの子の学力は中一程度だという評価は間違っているである。正しくは、中一の方程式ができなくても、中三の因数分解ができたりするのである。学力は弾力的に評価しなければならないのである。私は新しい学力観として弾力的学力観を提唱したいのである。断って置くがこれは文部省のいう「新しい学力観」とは何の関係もない。「新しい学力観」は、誤った古典的な学力観である固定的学力観を前提にしている。したがって、「新しい学力観」は古典的学力観に属するのである。

私は、序章において生徒の意欲を問題にしない教師には辞表を提出してもらった方が良いと書いたが、それは実は極端な言い方であり、私の本心ではない。なぜなら人は変わりうるからである。私は、教員の評価についても弾力的に評価するべきであると考えている。職場における教員評価はあまりにも短絡的であるように思われるからである。例えば、ある人が２年くらい指導がうまく行かなかったり授業がうまくいかなかったりしたときに、決してダメ教員の烙印を押すべきではない。３年目ぐらいに花開く人がいるからである。むしろ新米の先生は、２～３年は修羅場を経験すべきである。どんなに熱心に生徒を指導しても、生徒が全くいうことを聞かなかった体験を持つことはその人の教師生活にとって、プラスになることだからである。ある意味では最初からうまくいってしまう人のほうが恐いのである。修羅場を経験した人は、簡単なことでは挫折しないであろう。順風満帆いった人は逆にちょっとしたことで、折れてしまう可能性があるだろう。また、人間の深みという点でも問題があるだろう。人は成長しうる。このあたりまえの考えが、不思議なほどに教育界には欠落しているように思うのである。人を育てるということは組織を強くしていくうえで重要な視点である。成功し伸びゆく企業は、この観点を強く持っている。ところが、最も教育的でなければならない教育の現場で、この視点が欠落している、あるいは弱いというのは皮肉である。もちろん生徒を評価するときにも同じく、弾力的に評価しなければならない。いままでダメ生徒であったらといっても、これからもダメ生徒と決めつけてはいけない。生徒こそ日々成長しているのである。

話が脱線したのでもとに戻そう。算数・数学は学年が進行すればするほど、難しくなるとは言えない、と言ったが、これは二つの側面から考えられている。一つは、パラダイムすなわち視点・座標の問題であり、他の一つは、事象的な問題である。パラダイムの問題とは、事象的にはＡの問題の方がＢの問題より難しいとしても、生徒は逆に感じていることがあるということである。指導者と生徒の見方はしばしば反対であり得るのである。だから、すでに述べたようにいくら教材研究を机上でしたとしても、良い授業はできないのである。机上の研究ではっきりさせられるのは、理由・帰結の関係や因果関係などの事象的

な関係だけである。ところが生徒の感じ方は、しばしば事象的な関係とは無関係であり、場合によっては逆関係でさえある。したがって、良い授業をしようと思うならば、机上の世界から飛び出て生きた教材である生徒の海へと旅立たなければならないのである。生徒に学ぶ以外にないのである。生徒こそが先生の最大の先生である。ツメ他の一つすなわち事象的な問題とは、アルゴリズムの問題である。初歩の微分の計算のアルゴリズムと分数の足し算のアルゴリズムを比較するなら、文句無しに分数のアルゴリズムの方が複雑である。ところが、われわれは先入観にとらわれ、微分の計算の方が複雑であると思いこんでいるのである。これらの錯覚こそが、底辺校とか教育困難校といわわれる学校の生徒に、高校数学を教授することは不可能だという考えの基礎の一つなのである。

結論を先回りしていうならば、パラダイム（生徒の意識・構え＝生徒の基本的な認識系）の問題から考えても事象の問題から考えても、高校数学の方が小中の算数や数学より難しいとは、一概には言えないのである。内容によっては高校数学の方が簡単な場合もあり得るのである。したがって、教授法を工夫するならば底辺校とか教育困難校とかいわれる学校の生徒たちにも、高校数学を教授すること可能なのである。高校数学を指導することは決して不可能ではない。可能であるし、指導すべきなのである。

こう述べると私には、だが基礎の不足はどうするのかと、不満に思っている読者の顔が浮かぶ。たとえば、定積分の計算の際には確かに分数の足し算・引き算ができなければ、計算することはできない。だから、やはり基礎からは始めなければならないというわけだ。だが、ここで是非とも考えてほしい。この定積分の問題以外に分数の基礎がなければ、絶対に指導でないという単元・領域がどれだけあるだろうか。定積分の計算であってさえも、工夫をすれば分数が出てこないようにすることもできるし、他の単元ならばなおさらそうである。数値さえ工夫すれば、分数が出てこないようにすることは、さほど難しいことではない。分数を絶対に必要とする単元はよく考えてみれば、少ないのである。それでも定積分の計算など、分数を必要とする場面も確かにある。実は基礎への還帰は、必要な範囲で行えば良いのである。

やや結論を先回りしすぎた観があるので、そろそろ章を変えることにしよう。

５章　小ステップ教育

ではどのような工夫をすれば良いであろうか。どのように指導すれば良いであろうか。基本的な視点は、生徒の立場に立つことである。生徒の目の高さに立つことである。教材を生徒にとって簡単なものから、より高度なものへと作りなおさなければならない。これは、教科書の順番の通りに指導するということではない。教科書は、事象的な関係によって並べられている。しかも、教科書の記述はあまりにも飛躍が大きいのである。飛躍をなくし、生徒にとって簡単な問題から難しい問題へと編成し直さなければならないのである。そして、

あかずたゆまず繰り返し繰り返し指導することが必要である。このような工夫によって高校数学を指導することは可能なのである。

ここで誤解を避けるために断っておこう。高校数学を指導できるといっても、受験に対応できるという意味ではない、ということである。たとえば、ＸＸ高校の上位の生徒だけをマンツーマンに近い形で指導すれば、可能であるかもしれないが、それではＸＸ高校の存在意義を失ってしまう。むしろ中学時代、先生たちにあまり相手にしてもらえず、自信を失っている生徒たちにこそ愛情を注ぐべきである。標準は、中より下の生徒にあわせるべきである。では、最下層の生徒はどうすべきか。最下層の生徒は、放課後残すなどしてマンツーマンに近い体制で指導するしかない。最下層の生徒は、教室における一斉指導では限界があるからである。

さて、実際にわれわれがどんな指導をしているのか実践から報告したい。われわれが行っている指導を、小ステップ教育と呼んでいる。小ステップ教育の中でも特に大きな成功をおさめた２次関数の最大値・最小値を求める問題を例に取りたい。

これから小ステップ教育を述べていくがその際に、大事な注意についてのべておきたい。まず第一に、本質的でない事で生徒に難しいと感じさせてはならないというである。例えば、２次関数の最大最小の問題で分数などは必要ない。問題及び答えが、整数になるように工夫することが大切である。指導者は２次関数の最大最小の問題に比べれば、分数などとるに足りないことだと思っている。だが、生徒はそうではない。事象的にはまったく同じでも、分数が入るだけで大変高度なことをやっていると思い込んでしまう。逆に言うと、レベルの高い生徒には分数の問題を与えると良い。高度な問題をやってると錯覚するからである。学力差に対応するための一つの工夫である。第二に、ステップはできるだけ小さくするということである。ステップの飛躍を可能な限りなくすことである。新しいステップには２つ以上の要素を挿入しないようにしなければならない。同じような問題ばかりやっていたら生徒が飽きるのではなどと心配する必要などないのである。標準の学力に達しない生徒たちは、比較的単純な作業に耐え続けることができる。耐え続けるというより、むしろ喜んでやり続けることができるといったほうが良い。計算は彼らにとって楽しい作業なのである。だから、ステップをできるだけ小さくすることが必要である。第三の注意に入ろう。これはきわめて大事なことである。この論点だけで、一つの著書が書けるほどである。それは、右脳と左脳の協力ということである。現在の数学教育は、左脳の教育に偏りすぎている。あまりにも論理的な操作に偏りすぎているのである。イメージや直観が軽視されているのである。しかし、数学に必要な能力は抽象化・形式化・論理化の能力だけでなく、具体化・具象化・直観化の能力も重要である。イメージを育てる教育が必要なのだ。実践例に即して具体的に言うならば、式とグラフを結びつけることが肝要である。安易な指導は手順化である。言い換えればアルゴリズム化である。これらは左脳的な指

導である。直観と論理の結合こそが肝要なのである。右脳と左脳の協同に心がけなければならない。（右脳数学・直観数学構想を参照）

注意は終わりにして実践の報告に入ろう。問題は、次のような問題である。

Ⅰ　2次関数 $y=2x^2+3x+3$ の最小値を求めよ。
Ⅱ　2次関数 $y=2x^2+3x+3$ の定義域が、$-2 \leqq x \leqq 1$ であるときの最大値と最小値を求めよ。

解答

Ⅰ
$$
\begin{aligned}
y &= 2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)+3 \\
&= 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)+3 \\
&= 2\left\{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+3 \\
&= 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+3 \\
&= 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}
\end{aligned}
$$

よって、最小値は $x=-\frac{3}{4}$ のときで $\frac{15}{8}$ である。

Ⅱ　略

ＸＸ高校に赴任して最初の２年間は、この問題の指導には成功しなかった。かなり時間をかけても、この問題ができるようになる生徒はクラスに数名しかいなかったのである。原因は教科書の例題が、あまりにも飛躍が大きすぎるのである。この問題を分析してみると、式の変形だけに限定しても次のような８ないし９段階のステップがあることがわかる。

① $y=x^2+2x$ の変形
② $y=x^2+2x+3$ の変形
③ $y=2x^2-4x$ の変形
④ $y=2x^2-4x+4$ の変形
⑤ $y=-x^2+4x$ の変形
⑥ $y=-x^2-4x+3$ の変形
⑦ $y=-2x^2-8x+5$ の変形
⑧ $y=2x^2+3x+2$ の変形
⑨ $y=-2x^2+5x-5$ の変形

①の変形
$$
\begin{aligned}
y &= x^2+2x \\
&= x^2+2x+1-1 \\
&= (x+1)^2-1
\end{aligned}
$$

②の変形
$$
\begin{aligned}
y &= x^2+2x+3 \\
&= x^2+2x \qquad\qquad +3 \\
&= x^2+2x+1-1 \quad +3 \\
&= (x+1)^2-1 \qquad +3
\end{aligned}
$$

$$= (x+1)^2+2$$

③の変形

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2-4x \\
&= 2(x^2-2x) \\
&= 2(x^2-2x+1-1) \\
&= 2\{(x^2-2x+1)-1\} \\
&= 2\{(x-1)^2-1\} \\
&= 2(x-1)^2-2
\end{aligned}$$

④の変形

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2-4x+4 \\
&= 2x^2-4x && +4 \\
&= 2(x^2-2x) && +4 \\
&= 2(x^2-2x+1-1) && +4 \\
&= 2\{(x^2-2x+1)-1\} && +4 \\
&= 2\{(x-1)^2-1\} && +4 \\
&= 2(x-1)^2-2 && +4 \\
&= 2(x-1)^2-2+4 \\
&= 2(x-1)^2+2
\end{aligned}$$

⑤⑥⑦⑧⑨略

①と②の関係をよくみてほしい。②の構成細胞として①があることがわかるであろう。③と①の関係も同様である。また、③は④の構成細胞である。どの段階においても前のステップが次のステップの基礎になっているのである。そして、①はすべてのステップの基礎になっている。どのステップにおいても、必ず①が現れるのである。実は、先の例題には①から⑧までのすべての段階が混入されているのである。いかに飛躍が大きいかわかるであろう。教科書ではこの例題の解説は１ページも与えられてない。ということは、この例題の指導に想定している時間は、多く見積もっても１．５時間程度であろう。教科書をつくった先生たちははたして底辺校といわれる高校を１度でも経験したことがあるだろうか。私には残念ながら否としか思えない。その証拠は指導書である。指導書を読んでも少しも参考にならない。どんな点が生徒にとって分かりにくいのか、まったくといっていいほど指摘されていない。

教科書の無能さの指摘はこんなところにしておこう。①から⑨までの時間配分は各ステップについて２／３時間である。つまり３ステップについて２時間である。しかも各時間の間に２０分程度の小テスト実施するので、①から⑨ま

での指導は全部で７～８時間かかることになる。進学校の先生にとって信じられない時間であろう。だが、これぐらいが妥当な時間なのである。

式の変形の指導が終わった段階で始めて先のＩおよびⅡの指導にはいることができる。Ｉの指導でも３～４時間の指導が必要である。しかも式の変形の前に徹底したグラフの指導がなされているのである。そして先の注意でも述べたように、グラフと式あるいは値と結びつくように指導しなければならない。

この小ステップ指導は大変大きな成功を収めた。このときの期末テストは、平均点が９３台であり、満点者が１５名ぐらいいたのである。誤解を避けるために言っておくならば、決して問題のレベルを落としたのではないということである。高校数学教科書レベルの問題である。小ステップ教育の成果なのである。おそらくこの小ステップ教育を受けていないＸＸ高校生ならば、平均点は６０を越えないであろう。実際の私が赴任した最初の２年間はそうだったのである。ＸＸ高校のおいては、２次関数の最大値最小値の問題は指導できないというのが常識だったのである。

最初の２年間は、何十回一般形から標準形への変形を説明しても生徒は理解できなかった。３年目からこの小ステップ教育を取り入れて、それから平均点が鰻登りに登り、現在の平均点に達したのである。そして、この論文の冒頭の前奏曲に書いた教室の状態が出現するようになったのである。誰も私語せず、誰もよそ見をせず、誰も居眠りをせず、例外なく全員が計算に没頭する。教室は水を打ったように静かであり、する音はシャープペンを忙しくカリカリと動かす音だけがするのである。結論を言ってしまえば、前奏曲の問の答えは魔法でも何でもないのである。生徒の実態にあった指導さえすれば、生徒は２次関数の最大値・最小値の問題であろうとできるようになるのである。生徒にあれだけ拒絶反応を引き起こした問題であってもである。

６章　結論その１

正しい指導さえすれば、生徒は高校数学であっても理解し自分のものにすることができる。そして、生徒は数学を好きになるのである。なぜ生徒は数学が嫌いになってしまったか。それは理解できなかったからである。成果がなかったからである。成果のない意欲など絶対にありえない。（「新しい学力観」が言う成果のない意欲など形容矛盾である。）逆に言うならば、成果があれば意欲が生じるのである。われわれの実践が証明するところによれば、理解できるようになりさえすれば生徒は数学が好きになるのである。先にも書いたように、入学当初のアンケートによれば、９割の生徒が数学は嫌いであると答えている。ところが、２次関数の指導が終えた段階で同じアンケートをとってみると、３８名中３４人が数学が好きであると答え、嫌いと答えた生徒はわずか４名である。嫌いと好きが逆転してしまうのである。

第１章の問いに答えておこう。底辺校と言われる学校の生徒は特別の動機付けをしなければ、数学を好きになることはないという考えは、誤りである。高

校数学の内容を、教科書の章立ての通りに指導していけば、生徒は数学が好きにあるのである。実際にアンケートで嫌いと答えた４名の生徒も、中学時代よりはかなり好きになり、好きと言えるまであと一歩であると答えている。実は特別の動機付けなど必要としないのである。理解さえさせてやれば生徒は数学が好きになるのである。生徒の実態にあった適切な指導さえすれば、生徒は必ず数学が好きになるのである。粘り強い指導さえ繰り返せば、生徒は好きになるのである。一番最後の章で生徒の感想をいくつかお見せするが、その感想文を読むならば、私が言っていることが少しも誇張でないことがわかるであろう。生徒は本質的に数学が好きなのである。生徒は強い知的好奇心を持っているのである。

７章　諸論点

結論の途中であるが、いくつか語り落とした諸論点をここにいれておくことにしよう。一つは繰り返しということについてである。学力不振生徒の大きな特徴は忘却である。したがって、指導の際気をつけなければならないことは、常に基礎的なこと・大事なことは繰り返し繰り返し指導することが必要である、ということである。基礎への帰還は常に必要な範囲で繰り返し行わなければならないのである。たとえば、６章の標準形の変形のステップ③④の指導の際には次の分配法則の確認が必要である。

ａ（Ｘ＋Ｙ）＝ａＸ＋ａＹ　ａＸ＋ａＹ＝ａ（Ｘ＋Ｙ）

分配法則など何回もやっているから確認など必要ないと考えてはならない。常に基礎への還帰が必要なのだ。理由は忘却ということだけではない。スイッチの切り替えという問題も絡んでいる。

なぜなら、彼らは標準形の変形で使う公式　は因数分解

$X^2+2aX+a^2=(X+a)^2$で使った完全平方の公式と同じであることに気がつかないのである。標準形への変形をさんざんやった後で、因数分解の問題

X^2+4X+4を因数分解せよを出したとすれば、この問題に答えられないのである。彼らにはチャンネルは一つしかないのである。だから、常に基礎への還帰が行われなければならない。

われわれは繰り返しという事に次のような不安を抱く。生徒が飽きてしまうのではないかという不安である。だが無用の心配だ。生徒はそう感じていないからである。数学の指導者からすると、計算問題ばかりだと退屈してしまう。だから、生徒も退屈してしまうのではと心配するわけだ。だが、実践が証明するところによれば違う。生徒は同じような計算問題を不平も言わず、黙々とひたすらやり続ける。生徒は決して苦痛に思っていない。生徒はむしろ楽しんでいる。計算できることを喜んでいる。冒頭の前奏曲に書いた通り、生徒は因数定理による因数分解を３時間にわたり計算し続けたのである。計算が喜びなのだ。なぜか。理由は簡単である。それだけ彼らは数学に対する強いコンプレックスを抱いているのである。自分は数学なんてダメなんだと思いあきらめてい

た。自分の知性には、数学という高度なものは無縁であると思っていたのである。ところが高校にきて、中学時代よりはるかに複雑である数学を理解し、かつては自分とはまったく無縁であった高度な計算を自分でしていることは、驚異なのである。理解できるという事は喜びなのだ。高度な操作ができることは、無上の歓喜なのだ。人間がいかに知的好奇心をもっているかが、生徒たちの感想文からわかる。もしあなたが、ユーモアのセンスがないことで教師としての才能がないなどと思っているとすれば、無用な心配だ。生徒に理解させる力さえあれば、生徒は数学を好きになり、そしてあなたを好きになるであろう。理解ということはそれだけ大きいのである。生徒があなたに期待することは、数学を理解させてくれることなのだ。生徒は理解こそ最上の喜びなのだ。

脱線ついでに言うと、私はこの本論において特別の動機付けやユーモアなどは必要ないという事を強調している。これこそが本論の基本的なモチーフである。だが否定しているわけではない。特別の動機付けの研究やユーモアなどは、もちろんあった方が良い。私は、動機付けをまったくやっていないわけではない。むしろ可能な範囲で動機付けをしている。たとえば、魔方陣の話・対数の神秘・数学史・ゼノンのパラドックス・クレタ人の嘘など枚挙にいとまがない。だが、これらの努力は本質的でない。これらは小手先の技術である。普段の授業が大切なのだ。

逆説を言ってしまおう。特別な動機付けが必要なのはむしろ進学校のほうである。たとえば、数学が受験科目でない生徒に興味を持たせるのは大変なことである。中途半端に知的レベルが高いことが災いしている。底辺校の生徒に比べれば、素直さにかけるであろう。

数学を受験科目にしている生徒でさえ、本当の意味で数学に興味をもたせることは難しい。彼らは数学を手段としてしかみていない。数学がいかにすばらしい学問であるか、わかってはいるまい。数学とは受験問題を解くことであると思っている。紀元前から研究され大事な学問であるとされてきた数学は、決して受験のための手段ではない。ヨーロッパでは哲学とともに学問の女王とされてきたのである。それを何の役にもたたないけれども、進学のためにやむをえず勉強していると思っている生徒は、多数いるであろう。何と嘆かわしいことであろうか。

６章に関連づけてさらに一つの論点を付け加えておこう。６章で報告した期末テストの結果が与えた生徒への影響である。生徒がもっとも苦手としている単元は、１次関数や２次関数などの関数ある。そのコンプレックスの大きさたるや絶大なものがある。どうか１度で良いから生徒に聞いてほしい。いかに苦手であるかわかるであろう。ところがそのもっとも苦手とする単元で９０以上の点数が取れたのである。自分とは無縁だと思っていた関数を理解し、自分で最大値最小値を求めことができることは驚異なのである。自分があきらめていた可能性を知ることができたのである。これだけ自分を苦しめていた数学でもやればできるし、好きになり面白くなるを知ったのである。これは生徒にとっては革命的な事件と言って良い。高校時代で大きな思い出の一つになるであろ

う。その喜びたるや計り知れないものがある。生徒の書いた感想文を是非読んでほしいと思う。

テストの平均点についても一言述べておきたい。平均が９０を越えるテストは怠慢ではないかという批判もあると思う。指導が研究によってより高くなったとすれば、テストもそれに相応してレベルをあげるべきであるという考え方もあるであろう。それはまったくその通りである。だが、自信を根底から失っている生徒に１度は自信を回復させる必要があるのである。点数自身が生徒に与えた衝撃を是非知ってほしい。

再び結論に入る前に、もう一つだけ断っておきたい。それは、生徒の実態にあった授業をすれば、自然に生徒が授業を聞くようになると考えるならば、大きな間違いであるということである。すばらしい授業をすれば、自然に生徒は授業を聞くようになる、この考えは意外に広く流布されている考えである。だから、定時制の物理の先生たちが、強烈な動機付けによって生徒を引きつけようとした実践などが行われたのである。たとえば、剣山の上に裸で乗るなどの動機付けをした。だが、すばらしい授業をすれば、自然に生徒が授業を聞くようになると考えているならば、まさに幻想である。すばらしい授業をしなければ、自然に授業を聞かなくなるということは真実である。だが、すばらしい授業をすれば、自然に聞くようになるということは真実ではない。ＸＸ高校などの底辺校とか教育困難校とかいわれる高校に入学してくる生徒のほとんどの生徒が、数学に強い劣等感を抱き、数学にアレルギー反応を持っているのである。ほとんどの生徒が数学嫌いなのである。ほとんどの生徒が数学のすばらしさを理解していないのである。どんなにすばらしい授業をしようとも、残念ながら彼らは聞く耳を持っていないのである。聞くようにさせるために確かに先の物理の先生のように、強烈な動機付けをすることも一つの方法である。だが、すぐに種切れになってしまう。そして、生徒たちはより強烈な動機付けでなければ、聞かなくなってしまうのである。強烈な動機付けを試みる人は、生徒の知的好奇心を心からは信じていないのである。ふつうの教材でも、生徒は必ず興味を示すようになるとは信じていないのである。逆に言うならば、数学や物理を好きな自分たちを変わり者の人間であるとみなしているのである。ではどうすれば、生徒に聞く耳を持たせることができるだろうか。答えは簡単である。しつけをするということである。入り口を造らなければ、どんなにすばらしい授業をしようとも生徒は入ってくることはない。学力不振に陥った原因は、彼らの能力とともに、学習の姿勢も大きい。彼らに欠けているものは粘り強さである。頂上に登っていくためには、一歩一歩登って行くしかない。たとえ頂上が見えなかったとしてもである。頂上が見えないとき、確かに登ることがいやになってしまうことがある。だが、知的優秀児たちはこのとき非常に粘り強い。ある英才教室で、小学校低学年の子どもたちに魔方陣の問題をやらせたら、５方陣の問題を３時間の時間をかけて全員が解いてしまったという。途中にヒントを教えようとしたり、答えを教えようとしたが、子どもたちをそれを制して、問題を考え続けたという。何という粘り強さであろうか。学力不振生徒たちは、

このような体験をほとんど持っていない。成功体験をあまり持ち合わせていなのだ。それに対して、知的優秀児達はたくさん持っている。だから、より強く粘ることができる。苦労して頂上に何度も上り詰めて、頂上から見るすばらしい景観を何度も味わったことがあるためである。景観は苦労が多かったらならば、よりすばらしいものとなる。苦労して頂上をきわめた体験が少ない学力不振生徒たちは、粘ることができない。わからなければ、彼らは２、３分も考えないのである。すぐに放り投げてしまう。だから、物事は粘り強く挑戦しなければならないことを教えなければならないのである。「わからないからやらなかった」という言葉を私の前で言ったならば、生徒は大変激怒されることになる。私は徹底的に最初にしつけをする。「わからないから聞かない。」ではなく「聞かないからわからない。」というふうに因果関係が逆であることを徹底的に指導するのである。「１、２回聞いてわかることなら、君たちはわざわざ学校に来ることなどない。理解することは、生みの苦しみと同じような苦しみがある。だが、苦しんだからこそ理解したときの喜びも大きいのだ。」私が口癖のように言う言葉である。生徒の実態にあった授業をしたためだけで、前奏曲に書いた教室の状態が実現したわけではないのである。生徒の実態にあった授業は、生徒に聞かせるための必要条件であって、十分条件ではない。必要十分条件にするためには、実態にあった授業に厳しいしつけを加えなければならないのである。

８章　再び結論

　結論をまとめておこう。生徒は本質的に数学が好きである。小学校や中学校の算数教育や数学教育によって嫌いにさせられているが、正しい指導をすれば必ず生徒は数学が好きになるのである。しかも、基礎の欠けている彼らの指導は高校数学から始められるべきのである。その際に、特別の動機付けなどしなくても良いのである。たとえば、魔方陣などから始める必要はないのである。まず徹底的なしつけをする事が必要である。そして教科書の内容を指導すれば良いのである。もちろん教科書の内容を指導すると言っても、教科書の内容をその通りにやるという意味ではない。教科書は、生徒にとって簡単な内容から難しい内容へとは構成されていないし、また飛躍も大きい。したがって、生徒の視点に立った再構成が必要なのである。そして基礎への還帰は必要に応じて行えば良いのである。学力不振生徒の最大の問題点が忘却である以上、体系的な基礎への還帰は意味がないのである。単元の学習に必要な範囲で、復習をすれば良いのである。生徒の目の高さにたった指導をしていけば、必ず生徒は数学が好きになるのである。生徒の感想をいくつか載せておこう。

　「わかりやすい授業だったから数学が好きになった。」（男子生徒）「高校にはいるまで数学が嫌いだったのに今ではとても好きになりました。それはきっとＹＹ先生だから好きになれたのだと思います。とっても授業の教え方がうまくわかりやすい授業でした。」（女子生徒）「私は、中学のとき数学は得意じゃ

なかったです。だけど先生が言ったとおり今は数学が好きです。」（女子生徒）「僕は中学の時から数学が苦手で、テストでは余り良い点数がとれませんでした。またそのせいかもしれませんが、数学の教科は嫌いでした。しかし、高校に入ってからは数学が好きになりました。」（男子生徒）「私は、中学の時から数学が嫌いでしたが、なぜか数学がとてもおもしろい教科であるというのが、今、分かりました。今まで、前向きに勉強してもあまり分からなかったのですが、高校の数学は違っていました。なぜか、頭の中に中に入ってくる事柄を忘れることなくすべて自分のものにできてしまうのです。そこで数学に対する気持ちが変わってきたのだと思います。数学はおもしろい教科なのでこれからも苦手意識を持たずにがんばっていこうと思います。」（男子生徒）「中学校の時はほんと数学と聞いただけで嫌でした。でも高校に入学してＹＹ先生に数学を教わるにつれて数学がとてもおもしろいことにきずかされました。たぶん私は数学から逃げていたのかもしれません。でも今数学が好きって言えるようになりました。感謝の気持ちでいっぱいです。ありがとうございました。」（女子生徒）「私はこんなに数学が楽しくできるのは初めてです。すごく数学が嫌いだったのにこんなに数学が好きなったのも初めての経験です。先生が前に言ったこと”君たちは必ず数学が好きになる”は本当ですね。また先生の授業を受けたいです。」（女子生徒）

底辺校と言われる高校の生徒に高校数学を教授することは可能であるし、やならければならないのである。もちろん先にも書いたとおり、低学力生徒たちの特徴は忘却である。したがって、１度定着した学力もやがては消失してしまうであろう。それでは教育に意味がないであろうか。だが、私は問いたい。職員室の先生方ではたして何人の先生が、３乗の展開公式がいえるであろうか。私だって、ＸＸ高校の期末の日本史のテストの問題に答えることはできない。学生時代得意にしていたにも関わらずである。遅かれ早かれ忘却は誰にもくることである。しかしながら、生徒は自信という大きな財産を手に入れたのである。また、物事には粘り強く挑戦しなければならないということを学んだのである。勉強の方法についても彼らは学ぶことができたのである。生徒が社会にでたときに、いろいろなことを勉強していかなければならない。例えば、パソコンやワープロの勉強などをしなければならないが、そのときに小ステップなどで勉強したことは、大いに役立つに違いないのである。数学を学ぶ意義は何であろうか。私は、勉強の仕方を学び、思考の枠組みを広げることであると思う。そういう意味で是非とも生徒に高校数学を学ばせたいのである。

あとがき

この原稿は、昨年校内の研究紀要に発表したものを基に、加筆修正してできたものである。実はこの校内の研究紀要の中でも、論文に仕立て上げ県の研究紀要に投稿予定であると予告しておきながら、放ったらかしておいたものである。全く予想外のことであったが、校内の研究紀要が校外において好評をいた

だいたのである。あちらこちらで、お褒めの言葉をいただいたのである。友人の強い勧めもあり、今回県の研究紀要に投稿させていただくことにしたものである。

１９９４年ＺＺ県高教研数学部会投稿

出所：http://www5b.biglobe.ne.jp/~suugaku/sinngakuryokukann/001.htm　他